Johann Georg Prändel(s)
öffentlichen Repetitors der Mathematik auf dem churfürstl. Schulhause zu München

Geometrie
und
ebene
Trigonometrie
nebst
ihrer Ausübung auf dem Felde.



Mit 9 Kupfertafeln.

München, 1793.
Bey Joseph Lentner.

Nro 1312.

Geometrie und ebene Trigonometrie ꝛc.
Von Joh. Georg Prändl, Repetitor.

Imprimatur.

München im churfürstl. Bücher-
chercensur-Collegium, den
10ten April 1793.

Registr. Fol. 172.

F. X. Graff,
wirkl. Rath und Sek.

Vorrede.

Eine Art von Kommentär über Geometrien einiger schwerer Lehrbücher, den ich sowohl bey öffentlicher, als Privatunterweisung durch die acht Jahre in Nebenscripten nach und nach zu entwerfen genöthigt war, sind die ursprüngliche Veranlassung zu gegenwärtigem Werkchen. Erst enthielten diese Scripten blos **Erläuterungen** etwas zu unvollständiger Begriffe, beyläufig wie Seite 6. §. 20. vom Maase der Winkel, und beträchtliche **Abkürzungen** der Beweisarten, z. B. §. 155 oder §. 44 Trig. Zuweilen wurden auch Lücken ausgefüllt, als wie §. 60 der Uebergang zur Lehre von Parallellinien, oder §. 98 von Winkeln innerhalb der Peripherie zum Gegensatze der Winkel außer derselben. Es wurden auch merkliche Zusätze eingerückt, und, um die Sache für Anfänger weniger trocken zu machen, so manche praktische Anwendung untergestreut. Oft glückte es mir auch, die Lehrsätze präciser, oder wenigst mit mehr Bestimmtheit vorzutragen Zum Beweise mag §. 213 der Satz von der Quadra-

tur

tur des mondenförmigen Zirkelausschnitts, des Hippokrates dienen. Das System erhielt nebenher auch hie und da beßere Ordnung. So z. B. sehe ich nicht ein, warum Klemm den Lehrsatz, daß **die vier Winkel in jedem Trapeze 360° halten**, sammt dessen Zusatz mitten in die Figurenwandlung hineinstellt: oder daß der Satz von der Gleichheit der Produkte aus den Sehnensegmenten, nicht mit zur Lehre des Zirkels gehören soll. Endlich bemühte ich mich, so viel möglich, bey den Auflösungen und Beweisen die Verfahrungsart mit Worten, und nicht so fast mit Buchstaben auszudrücken; damit sowohl mehr mathematische Sprache als Allgemeinheit dadurch erzielt würde. Was die Beweise betrift, so wollte ich lieber mit einigen den **algebraischen** als den sonst beliebten **geometrischen** Zuschnitt dazu wählen. Der Jüngling, scheint es mir, gewinnt dabey den Vortheil, daß er die kettenartige Verbindung derselben leichter und eher zu überblicken in Stand gesetzt wird, als durch die geometrische Form des **Karstens, Kästners** u. a. wo sich bey Anfängern, wenn sie nicht sehr wohl in der dialektischen Syllogistik bewandert sind, leicht Fehlschlüße einzuschleichen pflegen. Indeß habe ich jene nicht hintangesetzt, und wo die Sache

dadurch

dadurch thunlicher schien, sie ebenfalls zu benutzen gesucht. Am Ende hielt ich es auch für gut, nach Prof. Feders und Anderer Beyspiel, eine kleine Geschichte der Geometrie anzuhängen. Ich schöpfte hier vorzüglich aus dem ersten Theil der **Nachrichten von dem Leben und den Erfindungen der berühmtesten Mathematiker. Münster** 1788; wo sich freylich in Vergleichung mit Klemms u. a. Geschichte hie und da, vorzüglich in Rücksicht der Zeitrechnung, Widersprüche vorfinden, welchem Fehler zuweilen auch interessantere Geschichten unterworfen sind. Kurz, die Scripten faßten nach einer kleinen Bearbeitung ein ziemlich vollständiges Ganzes in sich. Sie erhielten allen Beyfall, sowohl von Seite meiner Schüler, als der hier öffentlich aufgestellten Lehrer. Ich wagte es daher, vorzüglich auf wiederholtes Zureden des hiesigen verdienstvollen gelehrten Herrn Professors der Physik, und würdigen Mitgliedes der churfürstl. Akademie P. Max. Imhofs, meine geringe Arbeit den unpartheyischen Augen des Publikums vorzulegen. Enthält dieß Werk gleich nicht viel Neues; so wird man doch darinn durchgehends sehen, daß nirgend das mindeste Plagium begangen worden: sondern daß der Verfasser, um so deutlich seyn zu können, sowohl das

System

System selbst, als die kleinsten hineingehörigen Theile vorher wohl einstudiert und verdauet haben müsse. Sollte dasselbe auch keine sonderlichen Verdienste haben, so gilt es nichts destoweniger als ein Beweis von der großen Neigung eines Mannes zur Mathematik, der sie ganz ohne allen Lehrer studierte; dem es doch von jeher an Aufmunterung, an Unterstützung gefehlt, und der vielleicht seinem Vaterlande Nutzen schaffen würde, wenn ihn die Gunst des Schicksals auf den gehörigen Posten stellte.

Schriebs

München den 9ten Aprils 1793.

Der Verfasser.

Ueber

Ueberblick
der vornehmsten abgehandelten Theilen dieses Werkes.

Dritte

Seite

Geo-



Geometrie.

Allgemeine Vorbegriffe.

§. 1. Erklärung.

Die Geometrie ist die Wissenschaft der Grössen, in so ferne man dabey nur auf ihre Ausdehnung sieht.

§. 2. Erkl. Ausdehnung blos nach Länge sind Linien: Ausdehnungen nach Länge und Breite sind Flächen; und Ausdehnungen nach Länge, Breite, und Tieffe oder Höhe, sind endlich Körper.

§. 3. Zusatz. Die Gegenstände der Geometrie sind demnach Linien, Flächen und Körper.

§. 4. **Erkl.** Ein mathematischer Punkt ist die Gränze einer Linie, und dem zufolge ist auch eine solche Linie nichts anders als die Gränze einer Fläche, und eine solche Fläche die Gränze eines Körpers.

§. 5. **Anmerk.** In einem minder strengen Sinne läßt sich auch sagen, daß die Linie eine Reihe von Punkten, die Fläche eine Reihe von Linien, und der Körper eine Reihe von Flächen sey.

§. 6. **Erkl.** Eine gerade Linie ist der kürzeste Weg zwischen zween Punkten Fig. 1 Nro I: jeder andere Weg ist eine krume Linie, voraus gesetzt, daß kein Theil des Weges gerade gehe Nro II. — Oder eine gerade Linie ist jene, deren Theile sämtlich einerley Richtung haben. Im wiedrigen Falle, wo kein Theil des andern Richtung beybehält, eine krume Linie.

§. 7. **Anmerk.** Man könnte noch eine dritte Gattung von Linien annehmen, deren Theile nämlich bald gerad, bald krum sind, und selbe zusammgesetzt oder gemischt nennen. Sie wird in der Natur am häufigsten angetroffen. Z. B. Das Ufer eines Flußes, das zickzacke Schlängeln des Blitzstrahls, der Sprung durch eine Glasplatte oder ein Porzellanteller, die Bahn eines geschwungnen Körpers, die Marmoradern: überhaupt fast alle Umrisse der thierischen Körper und Pflanzen; vorzüglich eines Laubbaumes u. s. f.

§. 8. **Willkührl Satz.** Das Maas der geraden Linien sind Ruthen, Schuhe, Zolle, Linien. Eine Ruthe wird zu 10 Schuh, ein Schuh zu 10 Zoll u. s. f. angenommen. Man bezeichnet die Ruthen durch (°); die Schuhe durch ('), die Zolle durch ('') und s. f. Z. B. 18°, 7', 9'', 3'''.

§. 9. **Zusatz.** Krume Linien ist man daher nicht eher zu messen im Stande, als bis sie zuvor, wenn es möglich, in gerade verwandelt worden sind.

§. 10.

§. 10. Erkl. Jener Theil der Geometrie nun, der sich mit geraden Linien, und außerdem noch mit dem Kreise, samt den damit verwandten Flächen und Körpern beschäftigt, macht die Elementargeometrie aus: die übrigen nach Gesetzen beschriebnen krumen Linien samt ihren Abstämmlingen der Flächen und Körper gehören in das Gebiet der höhern Geometrie.

Nöthigste Bestimmungen des Zirkels, seiner Theile, der Winkel und Flächenfiguren.

§. 11. Erkl. Ein Zirkel (*Kreis*) entstehet, wenn eine gerade Linie sich um einen festen Punkt ganz herum bewegt. Der feste Punkt ist der Mittelpunkt (*Centrum*) Die gerade herum bewegte Linie ist der Strahl (*Radius*) Die beschriebne krume Linie, die Zirkellinie (*Peripheria*) Jede gerade Linie von einem Punkt der Peripherie zum andern, eine Sehne (*Chorda*) Jede durch den Mittelpunkt gehende Sehne ein Durchmesser (*Diameter*) Jede den Zirkel berührende Linie, Tangente (*Tangens*) Was immer für ein Theil der Peripherie, Bogen (*Arcus*) Ein Theil der Zirkelfläche zwischen einem Bogen und der dazu gehörigen Sehne, Abschnitt (*Segmentum*) zwischen zween Radiussen und dem Bogen, Ausschnitt (*Sector*). So ist z. B. Fig. 2 das c der Mittelpunkt. c d der Radius a d b h p die Peripherie. p h eine Sehne. a b der Diameter. f g oder q k eine Tangente. d b oder b h oder a p ein Bogen. p l h m ein Abschnitt. d c b ein Ausschnitt.

§. 12. Willk. Satz. Jede Peripherie denkt man sich in 360 gleiche Theile getheilet, die man

Grade nennt, weil sich diese Zahl durch die meisten Faktoren dividieren läßt. Der Grad wird wieder unterabgetheilt in 60 Minuten, dieser in 60 Sekunden u. s. f. Man bezeichnet sie gleichfalls, wie oben, mit (°) (′) (″) u. s. f. Z. B. 76°, 15′, 29″. Die obwaltenden Umstände werden allemal den Ausschlag geben, ob diese Zeichen von Linien oder Zirkelbögen zu verstehen seyen.

§. 13. **Lehrsatz.** Alle geraden Linien eines Zirkels vom Mittelpunkte bis an die Peripherie gezogen, d. i. alle Radiusse ein und des nämlichen Zirkels sind einander gleich.

Beweis.

Was gleiches Maas hat, ist gleich; nun haben alle Radiusse des nämlichen Zirkels die Zeuglinie, oder die Oeffnung des Zirkelinstruments zum Maase; also sind sie einander gleich.

§. 14. **Lehrs.** Der Radius gleicht dem halben Diameter. Fig. 2.

Satz.

$$R = \frac{1}{2} D$$

Beweis.

Man beschreibe was immer für einen Zirkel, so ist

$$\left.\begin{array}{l} ac = R \\ cd = R \end{array}\right\} \text{aus der Definition.}$$

add. $ac + cd = 2R$. Aber in der Figur ist wegen der nämlichen Richtung.

$$ac + cd = D$$

Folglich $2R = D$

:2 $R = \frac{1}{2} D$

§. 15.

§. 15. **Erkl.** Ein ebner Winkel ist die Neigung zwoer geraden Linien in einen Punkt. Fig. 3 Ist die Neigung neutral d. i. neigt sich eine Linie weder mehr hinweg von der andern, als hinzu, so heißt der Winkel ein rechter und die Linien lothrecht oder perpendikulär aufeinanderstehend. Neigt sich eine Linie mehr hinzu zu der andern als hinweg so ist der Winkel spitzig; — und stumpf, wenn sich die eine mehr hinweg als zur andern hinzu neigt. So ist z. B. o ein rechter, m ein spitziger, und x ein stumpfer Winkel.

§. 16. **Zus.** Man sieht ohne mein Erinnern, daß ein spitziger Winkel kleiner als ein rechter, und ein stumpfer größer seyn müsse.

§. 17. **Willk. Satz.** Die Bezeichnung eines Winkels kann entweder durch einen oder drey Buchstaben geschehen. Im ersten Falle wird er in die Neigung hinein geschrieben, und dazu schicken sich stumpfe Buchstaben, als m, n, x, o u. s. f. Im zweyten Falle werden sie an die Endpunkte der Linien geschrieben, und muß jener in die Mitte zu stehen kommen, wenn man sie ausspricht oder schreibt, welcher vor die Neigung gesetzt wird. Z. B. der Winkel a b c oder c b a; aber niemals b a c oder c a b.

§. 18. **Erkl.** Die zwo Linien, welche den Winkel bestimmen heissen Schenkel, und ihr Neigungspunkt — Scheitel.

§. 19. **Zusatz.** Es kömmt bey der Größe eines Winkels alles auf die Neigung an. Die Länge oder Kürze der Schenkel trägt nichts dazu bey.

§. 20. **Lehrsatz.** Jeder Zirkel besteht aus 4 rechten Winkeln.

Satz.

Satz. Fig. 4.

$C = 4r$

Beweis.

Man ziehe in dem Zirkel einen Diameter a b, so kann der Radius d c im Mittelpunkte so aufgerichtet werden, daß er sich weder mehr rechts als links neigt d. i. neutral ist; eben das kann auch mit dem Radius c f auf der Gegenseite bewerkstelliget werden, und daher ist

$$\begin{array}{l} o = r \\ m = r \\ y = r \\ x = r \\ \hline o + m + y + x = 4r. \end{array}$$

Aber die Neigungen

$$o + m + y + x = C$$

also. $C = 4r$

§. 20. Zusatz. Es sind demnach die Bögen aus dem Scheitel des Winkels beschriebner Zirkel das natürlichste Maas eines Winkels. Denn man stelle sich vor, es sey Fig. 5 der Radius d c um c beweglich, so wird, wenn er als Schenkel von d nach a oder nach b rückt, der Bogen d a oder a b in eben dem Verhältnisse abnehmen oder zunehmen, wie die Neigung; weil der Radius bey Erzeugung des Zirkels als Ursache eben so große Wirkung in der Peripherie d. i. in den sämtlichen Bögen hervorbringen mußte, als weit er sich von der ersten Richtung weggeneigt hatte. Nun aber diese Neigung läßt sich als wachsender Winkel betrachten; also ist sie proportionel, und zwar an jeden Orte mit dem Bogen, der ihr entspricht, und kann folglich sein Maas abgeben.

§. 21.

§. 21. Zusatz. Weil grosse und kleine Zirkel alle gleich viele Grade haben, so liegt nichts daran, ob aus der Neigung eines Winkels ein grosser oder kleiner Bogen zwischen den Schenkeln beschrieben wird; weil, wie wir schon oben sagten, die Kürze oder Länge der Schenkel gar nichts zur Neigung des Winkels beyträgt. Um wie viel also ein koncentrischer Bogen größer ist als ein anderer, um so viel hat er auch größere Grade. So z. B. Fig. 6 haben a b, f d, h g als koncentrische Bögen alle gleich viele Grade, und ist daher ein jeder das Maaß des Winkels.

§. 22. Lehrsatz. Jeder rechte Winkel hält 90°

Satz.

$$r = 90$$

Beweis.

Erwiesen ist worden, daß

$$C = 4r \quad \text{Aber}$$
$$C = 360°$$

Also $4r = 360$

$:4 \quad r = 90$

§. 23. Zusatz. Folglich hält jeder spitzige Winkel weniger als 90° und jeder stumpfe Winkel mehr als 90; weil dieser größer und jener kleiner als ein rechter ist.

§. 24. Erkl. Eine Figur ist eine allenthalben begränzte stättige Größe. Eine Flächenfigur nun ist eben, wenn sich von jedem Punkte derselben zum andern eine gerade Linie darauf ziehen läßt; geradlinicht, wenn ihre Gränzen d. i. die Linien gerade sind, und erhält allemal ihren Namen von der Anzahl der Seiten, z. B. Viereck, wenn sie von 4 Seiten eingeschlossen ist u. s. f.

§. 25.

§. 25. Zusatz. Es ist leicht begreiflich, daß zwo gerade Linien unmöglich einen Raum einschliessen können, und daß also das Dreyeck die erste mögliche Flächenfigur seyn müsse.

§. 26. Erkl. Es giebt sechserley Gattungen von Dreyecken. Dreyerley in Rücksicht der Winkel und dreyerley in Rücksicht der Seiten. In Rücksicht der Seiten Fig. 7 giebt es erstens gleichseitige Nro 1, in welchen jede Seite der andern gleich ist. 2tens gleichschenklichte Nro 2, wenn nur zwo Seiten einander gleich sind. 3tens ungleichseitige Nro 3, wo keine Seite der andern gleich ist. In Rücksicht der Winkel Fig. 8 1) rechtwinklichte Nro I, in welchen sich unter die dreyen Winkeln ein rechter befindet. 2) stumpfwinklichte Nro II, wo von den drey Winkeln einer ein stumpfer ist. 3) spitzwinklichte Nro III, wenn alle drey Winkel spitzig sind.

§. 27. Erkl. Von Vierecken giebt es fünferley Gattungen. 1) Quadrate Fig. 9 Nro 1, eine Figur von 4 gleichen Seiten und eben so viel gleichen Winkeln. 2) Rechtecke Nro 2, wo die Winkel zwar alle gleich aber nur zwo und zwo sich entgegen stehende Seiten gleich sind. 3) Rauten Fig. 10 Nro 1, wo zwar alle Seiten, aber nur zween und zween gegen überstehende Winkel gleich sind. Sie heißen auch Rhomboiden. 4) Länglichte Rauten oder Rhomboiden Nro II, wo allemal zwo und zwo entgegen stehende Seiten und auch zween und zween solcher Winkel sich gleich sind. Diese 4 Arten von Vierecken befaßt man auch sonst unter dem Name Parallellogram. 5) Trapezen Nro III, wo keine Seite eben der andern gleich

seyn

seyn darf, oder wo keine der obigen Bestimmungen statt hat.

§. 28. Erkl. Polygone oder Vielecke heißen alle übrigen Figuren, die mehr als 4 Seiten haben. Sind die Seiten und Winkel gleich, wie Fig. 11 Nro 1, so heißen sie regulär; im wiedrigen Falle z. B. Nro 2 irregulär.

Grundbestimmungen der geradlinichten Dreyecke samt ihrer allerersten Anwendung.

§. 29. Grundsatz. Flächen, die sich einander vollkommen decken, sind gleich und ähnlich, d. i. kongruent.

§. 30. Willk. Satz. Das Zeichen der Kongruenz ist $\cong$, und das der bloßen Aehnlichkeit $\backsim$

§. 31. Lehrsatz. Durch eine Seite und die zween darauf liegenden Winkel, die aber zusamm genommen kleiner als 180° seyn müssen, läßt sich ein einziges Dreyeck bestimmen. Fig. 12

Beweis.

Denn man verlängere die beyden Seiten so lange in der nämlichen Richtung, bis sie sich durchschneiden, und den dritten Winkel bilden, so wird nur ein einziger Punkt möglich seyn, wo dieser Durchschnitt geschieht. Werden aber die Seiten nicht in der einmal zu Grund gelegten Richtung verlängert, so werden entweder die Winkel verändert, oder die Figur wird mehreckigt, oder auch krumlinicht.

§. 32. Anmerk. Daß die beyden Winkel zusamm nicht 180° halten dürfen, sondern kleiner seyn müssen, kann

indeß

indeß aus der Erfahrung gezeigt werden, bis man tiefer unten im Stande seyn wird, es in aller mathematischeu Schärfe zu erhärten.

§. 33. Zusatz. Wenn also in Zukunft erwiesen werden kann, daß in zwey oder mehrern Dreyecken diese Bestimmung gleich ist, das heißt, daß eine Seite, und die darauf liegende Winkel in dem einen Dreyecke, einer Seite und den darauf liegenden Winkeln in dem anderen Dreyecke gleich sind, so ist auch eben darum erwiesen, daß die Dreyecke selbst kongruent sind, denn die Seite deckt die Seite, und die Winkel die Winkel, also die ganzen Dreyecke.

§. 34. Lehrsatz. Zwo Seiten mit dem eingeschloßnen Winkel, bestimmen ebenfalls nur ein Dreyeck. Fig. 13

Beweis.

Denn um die Figur zu begränzen, und die gegebnen Stücke beyzubehalten, muß man gerade da eine Schlußlinie ziehen, wo die beyden Endpunkte der Seiten sind.

§ 35. Zusatz. Dreyecke also, wo überall dieß statt findet, sind gleich und ähnlich, weil sie einerley Bestimmung haben.

§. 36. Lehrsatz. Drey Seiten bestimmen ebenfalls nur ein Dreyeck. Fig. 14

Beweis.

Man setze die Seitenlinien zusamm wie man will, so wird zwar die Lage aber nie das Dreyeck selbst verändert werden; denn nach gehöriger Wendung decken sie sich allemal wieder.

§. 37. Zusatz. Kann nun erwiesen werden, daß in zweyen Dreyecken einerley Seiten sind, so ist auch der Beweis von der Kongruenz der Dreyecke fertig.

§. 38.

§. 38. **Lehrsatz.** In gleichen und ähnlichen oder kongruenten Dreyecken stehen gleichen Winkeln gleiche Seiten; und gleichen Seiten auch gleiche Winkel entgegen.

Beweis.

Weil sich in diesen Dreyecken bey der Auseinanderlegung alles decken muß, und weil überstehende Seiten und Winkel Ursach und Wirkung von einander sind, so folgt auch daraus, daß Winkel den Winkeln als Ursachen gleicher Wirkungen; und Seiten den Seiten als Wirkungen gleicher Ursachen gleich sind.

§. 39. **Zusatz.** Drey Seiten, deren zwo zusamm genommen nicht größer als die dritte sind, können kein Dreyeck bestimmmen. Denn bey Errichtung derselben fallen sie allemal auf die dritte hinauf; und giebeln sich zu keinem Dreyecke.

§. 40. **Aufgabe** Einen Winkel in zween gleiche Theile zu theilen. Fig. 15

§. 41. **Auflösung.** Man schneide mit einer beliebigen Zirkelöffnung aus dem Scheitel des Winkels von den Schenkeln 2 gleiche Stücke ab, setze ferner den Zirkel in die Abschnittspunkte ein, mache auswärts in der Mitte mit einer gleichen Oeffnung Bögen, die sich einander durchschneiden, und ziehe dann eine gerade Linie aus dem Scheitel durch den Durchschnittspunkt der Bögen, so ist der Winkel in zween gleiche Theile getheilt.

Satz

$\circ = \square$

Beweis.

Beweis.

$ab = bd$ } als gleiche Zirkelöffnungen.
$ac = cd$ }
$bc = bc$

Also $\triangle abc \cong \triangle bcd$; weil die Seiten überall einerley nach §. 37., und $o = m$, weil ihre entgegengesetzten Seiten gleich sind §. 38.

§. 42. Zusatz. Daraus ist begreiflich, daß sich jeder Winkel in 2, 4, 8, 16, u. s. f. gleiche Theile theilen läßt. Denn man darf nur jeden Theil wieder in zween gleiche Theile theilen, so erhält man 4 gleiche Theile. Wird das Geschäft wiederhollet, so bekömmt man 8, u. s. w.

§. 43. Aufgabe. Eine gerade Linie in zween gleiche Theile zu theilen. Fig. 17

§. 44. Auflösung. Man beschreibe unter und über der Linie aus den beyden Endpunkten mit gleicher Zirkelöffnung Bögen, die sich einander durchkreuzen, und ziehe dann durch die beyden Durchkreuzungspunkte eine Linie, so wird dieselbe die gegebne Linie in 2 gleiche Theile theilen.

Satz

$ac = cb$

Beweis.

Man zeichne die Zirkelöffnungen wirklich aus den Durchschnittspunkten, so ist

$ad = db$ } als Radiusse.
$af = fb$ }
$df = df$ also

$\triangle$ adf $\cong$ $\triangle$ dbf; wenn die Linie ab weggedacht wird. Folglich auch

o = n ferners

ad = db

dc = dc mithin wenn man die beyden Theile von ab wieder gelten läßt

$\triangle$ adc $\cong$ $\triangle$ dcb; weil überall zwo Seiten und der dazwischen liegende Winkel die nämlichen sind §. 34. daher ac = cb; weil sie gleichen Winkeln entgegen stehen, nämlich dem o und n.

§. 45. Anmerk. Eben so leicht wird es nach dieser Methode seyn, eine gerade Linie in 4, 8, 16, u. s. f. Theile zu theilen. Weiter unten soll auch gezeigt werden, wie eine gerade Linie in beliebige gleiche Theile getheilt werden könne, z. B. in 3, 5 u. d. gl. welches bey Winkeln so leicht nicht angeht.

§. 46. Aufgabe. Von was immer für einen Punkt aus, auf eine gerade Linie einen Perpendickel oder lothrechte Linie aufzurichten. Fig. 18

§. 47. Auflösung. Der Fall ist hier dreyfach. Erstens kann der Punkt über oder unter der Linie gegeben seyn; einmal in der Linie selbst, und einmal kann auch einer der Endpunkte eine Lothe verlangen.

Erster Fall. Man setze den Zirkel Nro I in den gegebenen Punkt ein, schneide mit gleicher Oeffnung beyderseits die Linie ab. Setze ferner den Zirkel in die Abschnittspunkte, und beschreibe mehrmals auf der dem Punkte entgegengesetzten Seite Durchschnittsbögen mit gleicher Oeffnung, so wird die von dem gegebnen Punkt auf den Durchschnittspunkt gezogne gerade Linie die gegebne Linie rechtwinklicht durchschneiden, das heißt, man wird den verlangten Perpendikel erhalten. Denn es gilt der

Satz

o = n

Beweis.

Beweis.

Wenn die ersten Radiusse gezeichnet sind, wird
da = db seyn
auch ac = cb weil auf diese Weise eine Linie in gleiche Theile getheilt wird. Also
$\triangle$ dac $\cong$ $\triangle$ dcb folglich
o = n

Zweyter Fall. Man setze den Zirkel Nro II in den Punkt ein, schneide beyderseits gleiche Stücke ab, und beschreibe aus dem Abschnittspunkten mit gleicher Oeffnung des Zirkels ober dem Punkte Bögen, die sich durchkreutzen, so wird die aus dem Durchschnitt auf dem Punkte herabgezogene Linie perpendikulär seyn.

Satz.

o = n

Beweis.

ac = cb } als Radiusse.
ad = db }
dc = dc also
$\triangle$ acd $\cong$ cbd und
o = n

Dritter Fall. Man setze den Zirkel Nro III in den Endpunkt ein, schneide von der Linie ein Stück ab, beschreibe auch von der entgegengesetzten Seite einen Bogen mit der nämlichen Oeffnung, und verlängere die Linie in ihrer Richtung bis dahin, so wird die übrige Verfahrungsart, so wie der Beweis, wie im zweyten Falle seyn.

§. 48.

§. 48. **Lehrsatz.** In einem gleichschenklichten Dreyeck sind die Winkel an der Grundlinie gleich. Fig. 19

Satz.

$o = n$

Beweis.

Man theile die Grundlinie in zween gleiche Theile, und ziehe von dem entgegenstehenden Winkel eine Linie auf den Theilungspunkt, so werden zwey gleiche Dreyecke entstehen.

Dem $ad = dc$ als Schenkel
$ab = bc$ der Theilung gemäß
und $db = db$ folglich
$\triangle\ adb \cong \triangle\ dbc$
also $o = n$

§. 49. **Lehrsatz.** In gleichseitigen Dreyecken sind alle Winkel einander gleich. Fig. 20

Satz.

$m = n = x$

Beweis.

Man mag zur Basis eine Linie annehmen, welche man will, so wird allemal das Dreyeck als gleichschenklicht, wie oben, betrachtet werden können. Z. B. man nehme ac für die Grundlinie an, so sind ba und bc die gleichen Schenkel, und eben darum $n = x$. Nimmt man ab, so ist $n = m$ folglich $m = x = n$

§. 50.

§. 50. Anmerk. Wollte man den Beweis ordentlich führen, ohne den obigen vorauszusetzen, so dörften nur ein Paar Grundlinien in zwenn gleiche Theile zerstückt, und wie oben verfahren werden.

Weitere Bestimmungen der Winkel, von Parallellinien und ihrer nächsten Anwendung.

§. 51. Erkl. Wenn zween oder mehr Winkel auf einer geraden Linie liegen, und aus einem Punkte gezogen sind, so heißen sie Nebenwinkel. Fig 21 Und wenn die Schenkel eines Winkels rückwärts verlängert werden, so entstehen Vertikalwinkel. Fig. 22. Nro I Nebenwinkel z. B. sind o und m oder x, y und z. Vertikalwinkel aber sind o und m oder auch x und y; weil, wenn man x oder y für den ursprünglichen Winkel annimmt, bey der rückwärtigen Verlängerung der Schenkel, der andere nothwendig entstehen muß.

§. 52. Lehrsatz. Alle Nebenwinkel sind zusamm genommen 180° gleich. Fig. 22 Nro II

Satz.

$$x + y + n = 180°$$

Beweis.

Man ziehe aus dem gemeinschaftlichen Punkt einen halben Zirkel durch die Schenkel, so ist

$$\begin{aligned} x &= ab \\ y &= bc \\ n &= cd \\ \hline x + y + n &= ab + bc + cd \\ ab + bc + cd &= \tfrac{360°}{2} = 180 \\ \hline x + y + n &= 180° \end{aligned}$$

§. 53.

§. 53. **Lehrsatz.** Alle Winkel um einen Punkt herum halten zusamm 360°. Fig. 23

Satz.

$$o + m + n + x = 360°$$

Beweis.

Denn man beschreibe aus ihrem Zusammenstossungspunkt einen Zirkel, und läßt die Schenkel die Peripherie durchschneiden, so haben sie zum sämmtlichen Maase den ganzen Zirkel, das ist 360°.

§. 54. **Anmerk.** Algebraisch wird die Sache sinnlicher; denn es gelte der obige Satz, so ist der Beweis

$$\begin{aligned} o &= ab \\ m &= bc \\ n &= cd \\ x &= da \\ \hline o + m + n + x &= ab + bc + cd + da \end{aligned}$$

Nun ist auch $360° = ab + bc + cd + da$, als der ganze Zirkel.

Folgl. $o + m + n + x = 360°$.

§. 55. **Lehrsatz.** Zween und zween Vertikalwinkel sind einander gleich. Fig. 22 Nro I

Sätze.

1) $o = m$ 2) $x = y$

Beweise.

1)

$$\begin{aligned} o + x &= 180° \\ x + m &= 180° \\ \hline o + x &= x + m \\ -x &= -x \\ \hline o &= m. \end{aligned}$$

als Nebenw.

B 2)

2)
$$\begin{array}{r}x+m = 180\\ m+y = 180\\ \hline x+m = m+y\\ -m = -m\\ \hline x = y.\end{array}$$

Oder auch so

$$\begin{array}{r}x+o = 180\\ o+y = 180\\ \hline x+o = o+y\\ -o = -o\\ \hline x = y\end{array}$$

§. 56. Zusatz. Wenn nun von 4 Vertikalwinkeln einer gegeben ist, so sind alle gegeben. Denn es halte z. B. $x = 100°$; also auch $y = 100$. Weil aber alle Winkel um einen Punkt herum 360° halten, so ist:

$100 + m + 100 + o$ *) $= 360$.

Aber $m = o$ folglich

subst. $100 + m + 100 + m = 360$

abgek. $200 + 2m = 360$

$-200 \quad = -200$

$2m = 160$

:2 $\quad m = \frac{160}{2} = 80$

Und da $m = o$ ist

sohin ist auch $o = 80°$

§. 57.

*) Hier muß der Buchstabe o nicht mit Null verwechselt werden.

§. 57. **Lehrsatz.** **In einem jeden geradlinichten Dreyecke halten immer zween Winkel weniger als 180°.** Fig. 24.

Beweis.

Weil dieß bey spitzwinklichten Dreyecken ohnehin schon klar ist; indem zween Winkel, deren keiner 90° hält, nicht miteinander 180°, das ist zweymal 90° geben können, so darf der Beweis blos für die stumpfswinklichten Dreyecke geführet werden, und zum Ueberfluße auch für rechtwinklichte; um zu zeigen, daß zween rechte Winkel in keinem Dreyecke Platz haben.

Man theile demnach jene Seite, wo die gegebnen Winkel anliegen, in zween gleiche Theile, dann ziehe man aus dem Scheitel des dritten Winkels eine gerade Linie bis an den Theilungspunkt, verlängere sie ausserhalb im nämlichen Maase und Richtung, schließe durch eine dritte gerade Linie noch ein Dreyeck, wo man will, und verlängere jene Seite des ersten Dreyecks, wo zween Winkel darauf zusamm stossen, so wird der Beweis für ein Paar Winkel allgemein seyn.

Satz 3.

$$x + y < 180°$$

Beweis.

$af = fc$ } aus der Konstruktion
$bf = fd$ }
$o = m$ als Vertikalw.

Also $\triangle afb \cong \triangle fdc$; folglich
$x = s$

Aber $y + s < y + s + r$
Da nun $y + s + r = 180°$

Also $y + s < 180°$, und weil $x = s$
substit. $y + x < 180°$

§. 58. Anmerk. Läßt man nun einen von den gegebenen Winkeln weg und nimmt den dritten dazu, so wird der Beweis der vorige seyn. Ich will ihn, wegen der verkehrten Lage der Figur ganz hieher setzen. Fig. 25

Satz.

$x + y < 180°$

Beweis.

$af = cf$
$bf = fd$
$o = m$
Also $\triangle abf \cong \triangle fcd$ und
$x = s.$
Aber $s + y < s + y + r$
$s + y + r = 180$

Folglich $s + y < 180°$
substit. $x + y < 180°$

§. 59. Zusatz. Weil die Bildung eines Dreyecks eine Zusammenstoßung zwoer Linien über einer dritten voraussetzt, so können die Schenkel zweener an die Endpunkte einer Linie gesetzter Winkel, die miteinander nicht kleiner als 180° sind, nie zusammenstossen oder konvergieren.

§. 60. Lehrsatz. Wenn zween an die Endpunkte einer Linie gesezte Winkel miteinander grösser als 180° sind, so werden sie rückwärts verlängert konvergieren, und also dießseits divergieren; denn die Winkel jenseits sind kleiner als 180°. Fig. 26.

Satz.

Satz.

$o + x < 180^\circ$

Beweis.

Es sey $y + m$ um p größer als 180°; oder der Ueberschuß der beyden Winkel heiße p.

$$\begin{array}{llcl} \text{Nun ist} & y + o & = & 180 \\ & m + x & = & 180 \end{array} \Big\} \text{ als Nebenw.}$$

$$\begin{array}{llcl} \text{add.} & y + m + o + x & = & 360^\circ \\ \text{subt.} & y + m & = & 180^\circ + p \\ \hline & o + x & = & 180^\circ - p \\ \text{Folglich} & o + x & < & 180^\circ \end{array}$$

§. 61. **Erkl.** Linien, welche, wenn man sie auch auf beyden Seiten unendlich verlängert, weder konvergieren noch divergieren, heissen Parallellinien.

§. 62. **Lehrsatz.** Wenn zwo Linien von einer dritten so durchschnitten werden können, daß

I die beyden innern Winkel zusamm 180° halten;

II oder die Wechselwinkel gleich sind; das heißt, jene Winkel, welche oben und unten, diesseits und jenseits, zwischen den durchschnittenen Linien liegen;

III oder auch, daß ein äußerer Winkel dem innern entgegengesetzten gleich wird:

So läßt sich in jedem Falle erweisen, daß die Linien parallel sind. Fig. 27. Nro I

Erste

Erste Voraussetzung.

$x + y = 180$

Satz.

a b und b c parallel

Beweis.

x und y sind zusamm nicht kleiner als 180°; also können nach §. 59. a b und b c nicht konvergieren. x und y sind nicht größer als 180; also können sie nach §. 60. nicht divergieren. Linien aber die nicht konvergieren und nicht divergieren, sind parallel: also sind a b und b c parallel.

Zwote Voraussetzung.

$x = n$

Satz.

a b und b c parallel

Beweis.

$y + n = 180°$

Aber $x = n$, wie vorausgesezt ist.

substit. $y + x = 180$. Also dem vorigen gemäß, a b mit b c parallel.

Dritte Voraussetzung.

$m = n$

Satz.

a b und b c parallel

Beweis.

Beweis.

$m + z = 180°$

Aber $m = n$, gemäß der Voraussetzung.

Subst. $n + z = 180°$

Also wiederum, dem oben erwiesenen Satze zufolge, a b mit b c parallel; weil die innern Winkel 180° halten.

§. 63. **Lehrsatz.** Alles obige von Parallellinien läßt sich auch umgekehrt erweisen: das heißt, wenn vorausgesezt wird, daß zwo Parallellinien von einer dritten Linie durchschnitten werden, so halten

I. die innern Winkel 180;

II. die Wechselwinkel sind gleich;

III. der äußere Winkel ist dem innern entgegengesezten gleich.

Voraussetzung für alle drey Sätze.

a b mit b c parallel.

Erster Satz.

$x + y = 180°$

Beweis.

a b und b c konvergieren nicht; also haben die anliegenden Winkel auch nicht weniger, als 180°.

a b und b c divergieren nicht; also haben sie auch nicht mehr als 180 §§. 59. 60.

folglich $x + y = 180°$

Zwey.

Zweyter Satz.

$x = n$

Beweis.

$$\begin{array}{rcl} x + y &=& 180; \text{ wie oben erwiesen worden.} \\ y + n &=& 180 \\ \hline \text{Also } x + y &=& y + n \\ -y &=& -y \\ \hline x &=& n \end{array}$$

Dritter Satz.

$m = n$

Beweis.

$$\begin{array}{rcl} z + n &=& 180 \\ m + z &=& 180 \\ \hline \text{Folglich } m + z &=& z + n \\ -z &=& -z \\ \hline \text{Sohin } m &=& n \end{array}$$

§. 64. Zusatz. Wenn mehrere Linien mit einander parallel gezogen werden Fig. 27 Nro II, so halten, was immer für zween innere Winkel, die zusamm gehören, 180°: was immer für zween Wechselwinkel sind gleich; und jeder äußere Winkel beträgt so viel als einer von seinen entgegengesetzten innern Winkel. Denn, weil die Linien unter sich parallel sind, so ist eben darum jede mit der andern parallel, und dann gilt wieder das obig erwiesene. So ist z. B. $x + r = 180$, weil ab mit fg parallel ist: ebenfalls $o = n$ und $x = n$.

§. 65.

§. 65. Zusatz. Wenn eine von den Parallellinien unter einen rechten Winkel geschnitten wird, so wird es auch, falls die schneidende Linie verlängert ist, eben so gut die andere seyn. Oder, wenn einer von den innern Winkeln ein rechter ist, so läßt sich dieß auch von dem andern behaupten; denn 90 + 90 = 180°.

§. 66. Lehrsatz. Parallellinien zwischen Parallinien, in so fern sie abgeschnitten werden, sind gleich. Fig. 28

Satz.

1) $ab = dc$. 2) $ad = bc$

Beweis.

Man ziehe von einem der vier Winkel zum gegenüberstehenden durch die begränzte Figur eine Linie; wir wollen selbe in der Folge etymologisch Diagonallinie nennen. So ist

$$ac = ac$$
$$\left.\begin{array}{l} x = y \\ z = n \end{array}\right\} \text{als Wechselw.}$$

folglich $\Delta\ adc \cong \Delta\ abc$. Nun steht dem x das dc und dem y das ab entgegen. Also $ab = dc$, und eben so $ad = bc$

§. 67. Lehrsatz. Wenn in einem Vierecke zwo und zwo überstehende Seiten gleich sind, so müssen sie auch eben darum parallel seyn. Fig. 29

Voraussetzung.

$ab = dc$ und $ad = bc$

Satz.

Saz.

a b parallel mit d c und
a d parallel mit b c.

Beweis.

Man ziehe eine Diagonal so ist

a c = a c
a b = d c } nach der Voraussetzung
b c = a d

also △ a b c ≅ △ a d c und
m = y } als Winkel die gleichen Seiten entgegen stehen. §. 38.
o = x

Weil dieß aber zugleich Wechselwinkel sind, so ist
a b paral. mit d c und
a d mit b c

§. 68. Zusaz. Alle Perpendikel zwischen zwo Parallellinien sind gleich. Denn zween und zween Perpendikel sind immer unter sich parallel, weil die innern Winkel $90° + 90° = 180$. §. 15. Nun aber sind Parallelen zwischen Parallelen gleich; also gilt dieß eben darum auch von Perpendikeln zwischen Parallelen. Ueberhaupt ist ein solcher Perpendikel das Maas der Parallelweite; da aber diese Weite überall sich selbst gleich ist, so müßen auch ihre Maase gleich seyn.

§. 69. Lehrsaz. Wenn in einem Parallellogram ein rechter Winkel ist, so sind alle vier Winkel rechte Winkel. Fig. 30.

Voraussetzung.

z. B. $m = 90°$

Säze.

Sätze.

1) $x = 90°$. 2) $n = 90$. 3) $o = 90°$.

Beweis.

1) $m + x = 180°$ als innere Winkel.
Aber $m = 90°$
Also $x = 90°$

2) $x + n = 180°$ aus obigem Grunde,
Aber $x = 90°$ wie erwiesen worden
folglich $n = 90$

3) $n + o = 180$ wie oben
Aber $n = 90$ wie erwiesen worden.
Also $o = 90$

§. 70. **Lehrsatz.** Alle Winkel in einem Dreyecke machen zusammen 180°. Fig. 31

Satz.

$$o + x + m = 180°$$

Beweis.

Man ziehe mit einer Seite durch den Scheitelpunkt des entgegenstehenden Winkels eine Parallellinie, so erhält man Wechselwinkel: da nun

$$o + n + s = 180$$

und $n = x$, dann $s = m$, so läßt sich substituieren, und es wird aus der Gleichung

$$o + x + m = 180°$$

§. 71.

§. 71. Zusatz. Es können demnach in einem Dreyecke weder zween stumpfe noch zween rechte Winkel seyn; weil diese zween Winkel im ersten Falle mehr als 180° und im zweyten Falle völlige 180° hielten, und demnach für den dritten Winkel nichts mehr übrig bliebe.

§. 72. Zusatz. In gleichseitigen Dreyecken beträgt ein Winkel 60°; denn die Winkel sind in solchen Dreyecken gleich §. 49; folglich hält einer $\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$

§. 73. Zusatz. In rechtwinklichten Dreyecken mißt ein Winkel an der größten Seite 45°; denn man kann sich dieselbe als die Basis oder Grundlinie vorstellen; da nun die Winkel in gleichschenklichten Dreyecken an der Basis gleich sind §. 48, und sie hier miteinander 90° halten, so trift für einen 45°, das ist $\frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$. Durch Algebra fällt der Beweis mehr in die Augen.

Sätze. Fig. 32

1) $y = 45^\circ$

2) $z = 45^\circ$

Beweis.

$$\begin{array}{rl} x + y + z & = 180^\circ \\ -\ x & = -90^\circ \\ \hline y + z & = 90^\circ \end{array}$$

Aber $y = z$ und substit.

I Subst. $y + y = 90^\circ$

$2y = 90^\circ$

$:2 \quad y = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$

II Subst.

II Substit. $z + z = 90°$

$2z = 90°$

: 2 $z = \frac{90}{2} = 45°$

§. 74. Zusatz. In gleichschenklichten Dreyecken überhaupt sind alle drey Winkel insonderheit gegeben, wenn einer gegeben ist; denn ist der an der Spitze gegeben, so bleiben für die übrigen beyden an der Grundlinie der Rest von 180°, oder nach der Sprache der Geometer das Komplement zu 180°, folglich für einen derselben die Hälfte dieses Komplements, weil beyde gleich groß sind. Ist ein Winkel an der Grundlinie gegeben, so ist auch eben darum sein Nachbar an der Grundlinie bekannt, weil er gleich viele Grade hält. Für den dritten Winkel am Scheitel bleibt das Komplement von den ersten beyden zu 180°. Fig. 7 Nro II. Algebraisch geht die Operation so vor sich. Setze man erstens, es halte der Scheitelwinkel $o = 28°$ so ist

$$o + x + y = 180$$
$$-o \qquad -28$$
$$x + y = 152$$

Aber $x = y$ folglich substit.

$x + x = 152$ und $y + y = 152°$

Abgekürzt $2x = 152$ und $2y = 152$

div. durch 2 $x = 76$ und $y = 76$

Setze man zweytens, es sey ein Winkel an der Grundlinie bekannt. Es halte z. B. Fig. 7 Nro III

$x = 34°$;

folglich auch der andere Winkel $m = 34°$

Nun ist $x + m + y = 180$

$$-x = -34$$
$$m + y = 146$$

Aber auch $-m = -34$

folglich $y = 112°$ §. 75.

§. 75. Zusatz. Wenn in ungleichseitigen Dreyecken zween Winkel zusamm bekannt sind, so ist auch der dritte als das Komplement zu 180° bekannt.

§. 76. Lehrsatz. Alle vier Winkel in einem Vierecke, es mag ein Parallellogram oder ein Trapez seyn, machen zusamm 360°. Fig. 33

Satz.

$$a + b + c + d = 360°$$

Beweis.

Man ziehe, wo man will, eine Diagonal, so zerfällt die Figur in zwo Dreyecke, wo die Winkel überall 180° machen, folglich in beyden 360° seyn müssen. Denn

$$a + m + x = 180$$
$$y + c + z = 180$$
$$a + y + m + c + x + z = 360$$

Aber $y + m = b$] Denn die Theile zusamm
und $x + z = d$] genommen geben das Ganze.

Also substit. $a + b + c + d = 360°$

§. 77. Zusatz. Da sich das Viereck durch eine Diagonal in zwo Dreyecke, das Fünfeck Fig. 34 in 3 Dreyecke, das Sechseck in 4 Dreyecke, u. s. f. zerfällen läßt, vorausgesetzt, daß sich die Diagonalen nicht durchkreuzen, so kann man den Inhalt aller Winkel in einem Polygone, es mag regulär oder irregulär seyn, leicht bestimmen: weil man weis, daß sich jedes Polygon in so viel Dreyecke zerfällen läßt, als es Ecke oder Seiten hat, weniger zwey: Folglich darf nur die Anzahl der Dreyecke mit 180° multipli-

ciert

ciert werden. Z. B. bey einen Siebeneck Fig. 35 ist die Anzahl der Dreyecke $7 - 2 = 5$; und demnach der Inhalt aller Winkel $180 \times 5 = 900°$. Wenn also allgemein n die Anzahl der Ecke in einen Polygon ausdrückt, so ist $180 \times (n - 2)$ der Winkelinhalt jedes Polygones.

§. 78. Lehrsatz. Jeder äußere Winkel eines Dreyeckes, der durch die Verlängerung einer Seite entsteht, ist den beyden innern entgegenstehenden gleich.

Satz. Fig. 36

$$o = m + n$$

Beweis.

$$
\begin{array}{rcll}
x + o & = & 180° & §. 52. \\
x + m + n & = & 180° & §. 70. \\
\hline
x + o & = & x + m + n & \\
-x & & -x & \\
\hline
o & = & m + n &
\end{array}
$$

§. 79. Zusatz. Ist der äußere Winkel in einem Dreyecke gegeben, so sind die zween entgegengesetzten innern zusammgenommen, und der dritte als Nebenwinkel bekannt.

§. 80. Zusatz. Der äußere Winkel am Scheitel eines gleichschenklichten Dreyeckes ist einem doppelten innern gleich, weil sie beyde gleich sind; folglich einer von beyden zweymal genommen so viel ist, als alle beyde.

§. 81. Lehrsatz. Der Winkel zwischen zwo Parallellinien ist so groß als die Summe der zween spitzi-

spitzigen Winkel, die seine verlängerten Schenkel mit den Parallellinien machen.

Satz. Fig. 37

$o = n + y$

Beweis.

Man verlängere auch einen der Schenkel rückwärts bis auf die Parallellinie, so entstehen Wechselwinkel, ein Dreyeck und ein äußerer Winkel an selben. Es ist demnach

$o = m + y$ §. 78.
Aber $n = m$ als Wechselw.
subſtit. $o = n + y$

§. 82. Erkl. Wenn der Scheitelpunkt eines Winkels im Zentrum eines Zirkels ist, so heißt dieser Winkel ein Zentralwinkel. Liegt aber der Scheitelpunkt in der Peripherie, so bekömmt ein solcher Winkel den Namen — Peripherialwinkel.

§. 83. Lehrsatz. Jeder Peripherialwinkel hat zu seinem Maaße den halben Bogen, den seine verlängerten Schenkel von der Peripherie abschneiden.

Der Beweis, um recht allgemein zu seyn, muß durch drey Fälle geführt werden. Denn es kann

I ein Schenkel durch den Mittelpunkt gehen;

II der Mittelpunkt sich zwischen den beyden Schenkeln befinden;

III oder derselbe kann gar ausser den beyden Schenkeln liegen.

Satz

Satz für den ersten Fall. Fig. 38

$$x = \frac{a\,b}{2}$$

Beweis.

Man beschreibe auf den nämlichen Bogen auch einen Zentralwinkel, so erhält man ein gleichschenklichtes Dreyeck, wo die Radiusse die Schenkel abgeben, und erhält auch einen äußern Winkel am Scheitel; folglich ist

$$2x = c \quad \text{§. 80.}$$
$$a\,b = c \text{ als sein Maas}$$
$$2x = a\,b$$
$$:2 \quad x = \frac{a\,b}{2}$$

Satz für den zweyten Fall. Fig. 39

$$x = \frac{a\,b}{2}$$

Beweis.

Man theile den Winkel mittels einer Linie durch das Zentrum in zween Theile, so hat man den obigen ersten Fall doppelt; denn es ist

$$o = \frac{a\,c}{2}$$
$$n = \frac{c\,b}{2}$$
$$\text{add.} \quad o + n = \frac{a\,c + c\,b}{2}$$

oder $x = \frac{a\,b}{2}$; weil sich das Ganze für die Theile zusamm genommen substituiren läßt.

Satz für den dritten Fall. Fig. 40

$$x = \frac{ab}{2}$$

Beweis.

Man ziehe durch das Centrum des Zirkels aus dem Scheitel des Winkels einen Schenkel auf die Peripherie, so hat man mehrmal den ersten Fall doppelt.

Denn
$$\begin{aligned} o + x &= \frac{ac}{2} + \frac{ab}{2} \\ -o &= -\frac{ac}{2} \\ \hline x &= \frac{ab}{2} \end{aligned}$$

§. 84. Zusatz. Der Zentralwinkel ist daher noch so groß als der Peripherialwinkel, wenn er mit ihm auf einerley Bogen steht; denn der erste hat den ganzen Bogen zu seinem Maaße, dieser aber nur die Hälfte desselben.

§. 85. Zusatz. Alle Peripherialwinkel, die auf einerley Bogen stehen, sind gleich; eben darum, weil jeder die nämliche Bogenhälfte zum Maaße hat. Fig. 41

Denn
$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}\, ab \\ m &= \tfrac{1}{2}\, ab \\ y &= \tfrac{1}{2}\, ab \end{aligned}$$

folglich $x = m = y$

§. 86. Anmerkung. Da in der Optik erwiesen wird, daß beym nämlichen Sehungswinkel auch die nämliche scheinbare Größe und Deutlichkeit des Gegenstandes statt hat, so würde z. B. für Amphitheater die runde Form die angemessenste seyn; damit die Scene, welche als ein Zirkelausschnitt dieses Rundels betrachtet werden kann, einen gleichen Sehungswinkel, und eben darum gleiche Deutlichkeit und Größe in den Augen der Zuschauer hervorbrächte.

§. 87. Zusatz. Einer von den Schenkeln eines solchen Peripherialwinkels läßt sich als Sehne immer kleiner und kleiner gedenken; ohne, daß die Allgemeinheit des Satzes sich nicht mehr darauf erstrecken sollte. Folglich ist der Satz auch noch wahr, wenn einer der Schenkel der kleinstmöglichste Theil einer Linie, oder so zu sagen, nur ein Punkt ist, und bey seiner Verlängerung, gemäß der Definition zur Tangente wird.

§. 88. Zusatz. Der Winkel also, den eine Sehne mit seiner Tangente macht, wie Fig. 42 hat zum Maase den halben Bogen, welcher zwischen der Sehne und der Tangente liegt.

§. 89. Anmerk. So richtig dieß auch aus den Vorhergehenden fließt, so strenge läßt sich dieß weiter unten aus andern Gründen erweisen.

§. 90. Zusatz. Jeder Peripherialwinkel, dessen Schenkel auf den Endpunkten des Diameters stehen, ist ein rechter Winkel; denn sein Maas ist die halbe Peripherie halb genommen.

Satz. Fig. 43

$$x = 90$$

Beweis.

$$x = \frac{abc}{2} = \frac{180}{2} = 90^\circ$$

§. 91. Aufgabe. Auf den Endpunkt einer Linie einen Perpendickel aufrichten.

Auflösung. Man wähle einen solchen Punkt über der Linie, daß man aus selbem mit einem Handzirkel so wohl den Endpunkt erreichen, als auch die Linie selbst schneiden könne. Mit dieser Oeffnung nun beschreibe man aus dem nämlichen

Punkt einen Zirkel; ziehe aus dem Durchschnittspunkt der Linie einen Diameter, und verbinde diese beyden Sehnen durch eine dritte Sehne, so ist diese perpendikular; denn es ist Fig. 44

$$x = 90°$$

Beweis.

$$x = \frac{abc}{2} = \frac{180}{2} = 90°$$

§. 92. Zusatz. Ein Winkel, den die Tangente mit dem Diameter macht, wie Fig. 45 ist demnach ein rechter Winkel; weil der Bogen welcher zwischen dem Diameter und der Tangente liegt, die halbe Peripherie selbst ist §. 88., folglich das Maas des Winkels ein Quadrant seyn muß.

§. 93. Zusatz. Es stehet deswegen jeder Diameter, und jeder Radius, weil er ebenfalls zum Diameter verlängert werden kann, perpendikulär auf seine Tangente.

§. 94. Zusatz. Eben so richtig ist, daß ein Winkel, welchen zween Tangenten miteinander machen, die halbe Differenz jener Bögen, die die Tangentialpunkte begränzen zum Maase haben. Fig. 46

Satz.

$$x = \frac{afc - abc}{2}$$

Beweis.

Man verbinde die beyden Tangentialpunkte durch eine Sehne so ist

$$x + m = z$$
$$x = z - m$$

Aber $z = \frac{afc}{2}$

$m = \frac{abc}{2}$ substit.

$$x = \frac{afc - abc}{2}$$

§. 95.

§. 95. Zusatz. Die Tangenten, welche den Winkel bilden, haben demnach allemal gleiche Länge; denn $o = \frac{abc}{2}$

und $m = \frac{abc}{2}$

also $o = m$ folglich ist das Dreyeck age gleichschenklicht §. 48., und ag = ge.

§. 96. Lehrsatz. Zween und zween einander entgegengesetzte Winkel eines im Zirkel hinein beschriebnen Trapezes halten zusamm 180°.

Sätze. Fig. 47

1) $y + m = 180$
2) $o + x = 180$

Beweis.

1)
$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{bcd}{2} \\ m &= \frac{dab}{2} \end{aligned}\right\} \text{§. 83.}$$

$$y + m = \frac{bcd + dab}{2}$$

aber $bcd + dab = 360°$

subst. $y + m = \frac{360}{2}$ oder

$$y + m = 180$$

2)
$$o = \frac{abc}{2}$$
$$x = \frac{adc}{2}$$

$$o + x = \frac{abc + adc}{2}$$

aber $abc + adc = 360$

$$o + x = \frac{360}{2} \text{ oder}$$
$$o + x = 180°$$

§. 97.

§. 97. Lehrsatz. Ein Winkel, dessen Scheitelpunkt ausser einem Kreise liegt, und beyde Schenkel die Peripherie durchschneiden können, hat zu seinem Maase die halbe Differenz der beyden Bögen, die zwischen seinen verlängerten Schenkeln liegen. Fig. 48.

Satz.

$$x = \frac{cd - ba}{2}$$

Beweis.

Da die Abschnitte der Schenkel innerhalb der Peripherie Sehnen bilden, so hänge man sie durch eine dritte Sehne zusamm, und dann ist

$x + y = o$ als ein äußerer Winkel am
oder $x = o - y$ Dreyeck.
substit. $x = \frac{cd}{2} - \frac{ab}{2}$ als Peripherialw.
$x = \frac{cd - ab}{2}$

§. 98. Lehrsatz. Jeder Winkel innerhalb der Peripherie hat znm Maase die halbe Summe der beyden Bögen die seine und seines Vertikalwinkels verlängerte Schenkel abschneiden. Fig. 49

Satz.

$$x = \frac{cd + ab}{2}$$

Beweis.

Man verbinde zweyerley Schenkel durch eine Sehne zum Dreyeck, so ist

$x = m + y$
substit. $x = \frac{cd}{2} + \frac{ab}{2}$ wegen Peripherialw.
oder $x = \frac{cd + ab}{2}$

Figu-

Figurenwandlung.

§. 99. Erkl. Eine Figur in eine andere umwandeln, heißt der Figur eine andere Gestalt geben, ohne den Inhalt derselben zu verändern.

§. 100. Lehrsatz. Jedes Parallelogram wird von einer Diagonallinie in zween gleiche Theile getheilt. Fig. 50

Satz.

$$x = y$$

Beweis.

dc = ab ⎫ als entgegenstehende Seiten
ad = bc ⎭ eines ▭.
ac = ac folglich

$\Delta x = \Delta y$

§. 101. Erkl. Ein Perpendickel, welcher von einer Seite zur andern in Parallellogramen gezogen wird, heißt die Höhe, und die Linie worauf man ihn gezogen hat, die Grundlinie, wie Fig. 51 In Dreyecken wird der Perpendickel von was immer für einen Winkel auf die entgegengesetzte Seite als die größte Höhe hingefällt; z. B. Fig. 52 Nro I, wo auch in benöthigten Fällen diese Grundlinie verlängert werden muß, wie Nro II

§. 102. Lehrsatz. Ein jedes schiefwinklichtes Parallelogram läßt sich in ein ihm gleiches rechtwinklichtes von einerley Höhe und Grundlinie verwandeln; und auch umgekehrt. Oder mit andern Worten: Parallelograme von einerley Grundlinie / sind gleich.

Dieß

Dieß zu erweisen, stelle man die Parallelogramme auf eine gemeinschaftliche Grundlinie, so wird entweders

I eine von den Gegenseiten da aufhören, wo die andere anfängt; oder

II sie werden zum Theil in einander liegen, oder endlich

III sie werden zwischen ihnen einen leeren Raum lassen. Der Beweis ist überall etwas anders.

Erster Fall.

Satz. Fig. 53 Nro I

$$x + y = y + z$$ *)

Beweis.

$x = y$, wegen der Diagonal

$z = y$ ebenfalls.

$x = z$

$+y = +y$ überall addiert

$x + y = y + z$

Zweyter Fall.

Satz. Nro II

$$x + y = y + z$$

Beweis.

$ac = fg$ } als Gegenseiten eines

$bd = fg$ } Parallelograms

also $ac = bd$

$-bc = -bc$

$ac - bc = bd - bc$ und in der Figur

ab

*) Wo diese Buchstaben keine Winkel, sondern jene begränzten Räume bedeuten, worinn sie stehen.

$$\begin{array}{lrcl} & ab & = & cd \\ \text{ferner} & af & = & cg \\ \text{und} & bf & = & dg \quad \text{folglich} \\ \hline & \Delta x & = & \Delta z \quad \text{aber} \\ & +y & = & +y \\ \hline & x+y & = & y+z \end{array}$$

Dritter Fall.

Satz. Nro III

$$x + y = y + z$$

Beweis.

Man verbinde die beyden Gegenseiten der Grundlinie durch eine dritte Linie, so ist

$$\begin{array}{rcl} ab & = & gf \\ cd & = & gf \end{array} \Big] \text{ als Gegenseiten in } \square \text{en}$$

$$\begin{array}{rcl} \hline ab & = & cd \\ +bc & = & +bc \\ \hline ab+bc & = & cd+bc \quad \text{und in der Figur} \\ ac & = & bd \quad \text{ferner wieder} \\ ag & = & bf \\ cg & = & df \quad \text{also} \\ \Delta\,(x+v) & = & \Delta\,(v+z) \\ -v & = & -v \\ \hline x & = & z. \\ +y & = & +y \\ \hline x+y & = & y+z \end{array}$$

§. 103. Zusatz. Weil Dreyecke nichts anders sind, als Hälften von Parallelogramen, so gilt der erwiesene Satz auch von Dreyecken; das heißt: Drey-

ecke

ecke von einerley Grundlinie und Höhe sind dem Inhalte nach gleich. Inzwischen läßt sich dieß auch förmlich beweisen.

Satz. Fig. 54

$\Delta\, abc = \Delta\, bgc$

Beweis.

Man kompliere diese Dreyecke zu Parallelograme von einerley Höhe und Grundlinie, so ist erwiesen, daß

$$abcf = dgbc$$

$$:2 \quad \frac{abcf}{2} = \frac{dgbc}{2}; \text{ in der Figur}$$

$$\Delta\, abc = \Delta\, bgc$$

§. 104. Lehrsatz. Jedes Parallelogram kann in ein anders von gegebner Höhe oder Grundlinie verwandelt werden.

Denn man setze die gegebne Grundlinie in der nämlichen Richtung an die vorige; ziehe von dem Endpunkt derselben eine unbestimmte gerade Linie durch den nächsten Winkelpunkt der Figur; verlängere die Linien überall von dieser Seite; schließe diese Verlängerungen durch Parallellinien, so erhält man ein großes aus vier kleinern Parallelogramen zusammgesetztes Parallelogram, wovon jene zwey gleich sind, durch welche die Diagonallinie nicht durchgeht.

Satz. Fig. 55

$y = x$

Beweis.

Beweis.

$$\begin{array}{rcl} m+x+v & = & n+y+z \\ -m & = & -n \\ \hline x+v & = & y+z \\ -v & = & -z \\ \hline x & = & y \end{array}$$

(erste und zweite Zeile: wegen der Diagonal; vierte Zeile: aus gleichem Grunde)

§. 105. Zusatz. Giebt man die Höhe, so ist der nämliche Fall der Methode; nur setzt man sie lieber an eine Höheseite des zu verwandelnden Parallelograms, wo die Diagonal dann abwärts gezogen wird.

§. 106. Zusatz. Wenn man also, wo immer in einem Parallelograme zwo Linien, die mit den Seiten parallel gehen, so zieht, daß sie sich einander auf der Diagonal durchschneiden, so entstehen allemal 4 neue Parallelograme, wovon jene zwey gleich sind, wo die Diagonal nicht durchgeht.

§. 107. Zusatz. Sollen schiefwinklichte Parallelograme verwandelt werden; so thut man am besten, wenn man allererst selbe in Rechtecke, und dann in die verlangten Figuren verwandelt.

§. 108. Zusatz. Daraus erhellet ferner, daß die Parallelograme auch nach der Verwandlung verschiedene Winkel annehmen können; wenn nur die Grundfläche und Höhe beybehalten werden.

§. 109. Lehrsatz. Jedes Dreyeck läßt sich in ein Parallelogram verwandeln, von verlangter Grundlinie oder Höhe. Auch ein Winkel nicht ausgenommen, der sich in dem verwandelten Parallelogram vorfinden soll.

Denn

Denn man kompliere das Dreyeck zu einem Parallelograme von gleicher Grundlinie und Höhe, und halbiere dasselbe durch einen Parallelschnitt, so kann man mit einer der Hälften, weil es wieder ein Parallelogram ist, wie oben verfahren.

Satz. Fig. 56

$$n + y = z$$

Beweis.

$$\begin{array}{rcl} n + y & = & \frac{1}{2}\, acdb \\ x + n & = & \frac{1}{2}\, acdb \\ \hline n + y & = & x + n \end{array}$$

aber $z = x + n$ §. 106.

$$\begin{array}{rcl} \hline n + y & = & z \end{array}$$

§. 110. Zusatz. Ist das Parallelogram einmal fertig, so kann es in allerley Rhombusse von verlangten Winkeln umgeschaffen werden, ohne daß der Inhalt dabey verliert; weil immer die nämliche Parallelweite als Höhe, und die nämliche Grundlinie bleibt.

§. 111. Zusatz. Daraus wird begreiflich, wie Dreyecke eben so leicht wieder in andere Dreyecke umgewandelt werden können. Denn man mache alles wie vorher, nur lasse man den Parallelschnitt weg, und ziehe in dem neuentstandenen Parallelogram eine Diagonal, und es ist Fig. 57

Satz.

$$y = z$$

Beweis.

Beweis.

$$x + y = z + v$$

aber $v = z$

und $x = y$ folglich subſtit.

$$y + y = z + z,$$ oder abgek.

$$2y = 2z$$

$:2 \quad y = z$

§. 112. Zuſatz. Was oben von verlangter Grundlinie, Höhe, oder Schiefe geſagt worden, gilt alles hier ebenfalls.

§. 113. Lehrſatz. Wenn die Diagonal eines Parallelograms in zween gleiche Theile getheilt, und durch den Theilungspunkt eine gerade Linie, wie immer an zwo Seiten hingezogen wird, so entſtehen in jedem Falle gleiche Vierecke.

Satz. Fig. 58

$$x + z = y + v$$

Beweis.

$fa = fb$ aus der Vorausſetz.

$r = s$ als Vertikalw.

$o = m$ als Wechſelw.

folglich $\Delta y = \Delta z$ Nun iſt aber

$$x + y = z + v$$

$$-y = -z$$

$$x = v$$

$$+z = +y$$

$$x + z = v + y$$

§. 114.

§. 114. Zusatz. Weil sich solcher Linien unendlich viele durch den Mittelpunkt der Diagonal ziehen lassen, so kann ein Parallelogram, in unendlicherley gleiche Trapezien zertheilet werden.

§ 115. Erkl. In einem rechtwinklichten Dreyecke heißen die beyden Seiten, welche den rechten Winkel bilden, Lothen oder Katheten, und die Gegenseite des rechten Winkels wird Hypothenuse genannt.

§. 116. Lehrsatz. In jedem rechtwinklichten Dreyecke ist das Quadrat der Hypothenuse gleich den Quadraten der beyden Lothen zusamm genommen.

Satz. Fig. 59

$$ac^2 = ab^2 + bc^2$$

Beweis.

Man quadrire die Seiten in der Figur; ziehe aus dem rechten Winkel des Dreyeckes einen Perpendickel auf die Hypothenuse, und verlängere selben durch das Quadrat eben dieser Linie, so wird dasselbe in zwey Parallelograme zerschnitten. Wenn man nun den an einem Parallelograme anliegenden Theil des Dreyecks sowohl ~~zum benachbarten Quadrate, als wieder zum Parallelograme hinzu denkt~~, so hat man Trapezen. Man ziehe hier überall die längere Diagonal; dann auch in dem Parallelogram und Quadrat; doch so, daß die vorigen nicht durchschnitten werden; und der Beweis fängt also an

$$o = o$$
$$n = m \text{ als Rechtwinkel.}$$

folglich $o + n = o + m$ ab

$ab = ad$ } als Seiten des nämlichen
$ag = ac$ } Quadrates.

Es ist demnach

$\triangle\ agb = dac = dab$ *) $= \frac{1}{2} ab^2$
$\triangle\ agb = afg$ *) $= \frac{1}{2}\ aghf$

$\frac{1}{2}\ aghf = \frac{1}{2}\ ab^2$
$2\times\quad aghf = ab^2$

Nachdem man in dem übrigen Parallelogram und Quadrate die nämlichen Diagonalen gezogen, so ist auch

$x = x$
$y = z$

$x + y = x + z$
$cl = ca$
$bc = aq$

also $\triangle\ clb = acq = qcb$ *) $= \frac{1}{2} bc^2$
und $\triangle\ clb = flc$ *) $= \frac{1}{2} fhlc$

$\frac{1}{2}\ fhlc = \frac{1}{2}\ bc^2$
$\times 2\quad fhlc = bc^2$ aber oben war
$aghf = ab^2$

$fhlc + aghf = ab^2 + bc^2$ in der
Figur $ac^2 = ab^2 + bc^2$

§. 117. Anmerk. Der vorgetragene Beweis dieses wichtigen Satzes, der in alle Theile der Mathematik so viel Einfluß hat, ist der abgekürzte euklidische. Es giebt vier und zwanzigerley Beweisarten, und wir wollen weiter unten noch ein Paar recht kurze anführen, nicht so fast, um mehr Ueberzeugung zu bewirken, als um zu erhärten, daß man auf verschiedenen Wegen zur Wahrheit gelangen kann.

§. 118.

*) Die mit Sternchen bezeichneten Dreyecke sind deßwegen den unmittelbar vorhergehenden gleich, weil sie mit selben gemeinschaftliche Grundlinie, und die Parallelweite zur gemeinschaftlichen Höhe haben.

§. 118. **Zusatz.** Das Quadrat einer Lothe ist demnach so groß als das Quadrat der Hypothenuse, weniger dem Quadrate der andern Lothe. Denn wenn die Hypothenuse $= h$, und die zween Perpendickel oder Lothen P und p bezeichnen, so ist

$$h^2 = P^2 + p^2$$

Nun

$$\begin{array}{rcl} -p^2 & = & -p^2 \\ \hline h^2 - p^2 & = & P^2 \end{array}$$

Oder

$$\begin{array}{rcl} h^2 & = & P^2 + p^2 \\ -P^2 & = & -P^2 \\ \hline h^2 - P^2 & = & p^2 \end{array}$$

§. 119. **Anmerk.** Eine Aufgabe hierüber zur Anwendung. Von dem Wetterableiter eines Thurms steigt ein schiefer Drath von 38 Klafter auf die Erde herunter. Das Ort wo er sich in die Erde senkt, ist beyläufig 13 Klafter vom Thurme entfernt; wie hoch mag wohl der Thurm seyn?

Auflösung. Weil der Drath eine Hypothenuse, der Thurm eine Lothe, und die oben bestimmte Entfernung die Grundlinie von einem angeblichen Dreyecke vorstellt, so ist sicher

$$\begin{array}{rcl} 38^2 & = & x^2 + 13^2 \\ 1444 & = & x^2 + 169 \\ -169 & & -169 \\ \hline 1275 & = & x^2 \\ 35\frac{7}{?} & = & x \end{array}$$

Eine zweyte Aufgabe. Jemand besitzt ein Haus an einem hart vorbeyfließenden Bache. Er möchte sich gern eine Feuerleiter machen lassen, die er auch jenseits des Baches anlehnen könnte. Wie hoch muß sie werden, wenn der Bach 18 Schuh breit, und die daranstoßende Mauer 32 Schuh hoch ist?

Auflösung. Auch hier stellt die Leiter eine Hypothenuse, die Mauer eine Lothe, und der Bach die Basis vor. Daher

$$x^2 = 32^2 + 18^2$$
$$x^2 = 1024 + 324$$
$$x^2 = 1348$$
$$x = 37 \text{ Schuh beynahe.}$$

§. 120. Zusatz. Sind die Lothen gleich, das heißt, ist das rechtwinklichte Dreyeck gleichschenklicht, so wird eben darum das Quadrat der Hypothenuse gleich dem doppelten Quadrat einer Lothe seyn.

§. 121. **Anmerk.** Hieher gehört die Aufgabe: Der berühmte de Romas (Bremisches Magaz. B. 2. S. 114) ließ einen grossen papiernen Drachen bey der Annäherung einer Gewitterwolke in die Höhe steigen, um elektrische Versuche anzustellen. Er hatte 780 Fuß von der Schnur abgewickelt; und schätzte den Winkel, welchen die Schnur mit dem Horizont machte 45°; wie hoch mag wohl der Perpendikularabstand des Drachen von der Erde gewesen seyn?

Auflösung. Da der Perpendickel, welcher von dem Drachen auf die Erde fällt, mit der Schnur und einem Theile der Horizontallinie ein rechtwinklichtes Dreyeck von der Art bildet, daß ein Winkel an der Hypothenuse 45° hält, so muß nach §.73. nothwendig dasselbe gleichschenklicht seyn; folglich

$$x^2 + x^2 = 780^2$$
$$2x^2 = 608400$$
$$x^2 = 304200$$
$$x = 551{,}6'' \text{ Schuh beynahe.}$$

§. 122. Zusatz. Aus diesem pythagorischen Lehrsatze fließt nun eine Anleitung, mehrere Quadrate in eins zu verwandeln. Man darf bloß die Seiten zweyer verschiedner Quadrate unter einem rechten Winkel zusammsetzen, die Hypothenuse ziehen, und quadrieren, so ist das Quadrat so groß, als die beyden gegebnen Quadrate zusamm genommen. Will

man noch ein Quadrat dazu addieren, so setze man dessen Seite rechtwinklicht auf die Hypothenuse, ziehe eine neue Hypothenuse, so ist ihr Quadrat so groß als die Summe der drey gegebenen Quadrate, u. s. f. Die Sache läßt sich auch algebraisch beweisen. Fig. 60 Nro I Man benenne die Seiten der Quadrate durch einen Buchstaben, und übertrage sie Nro II in der nämlichen Länge

Satz.

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 + v^2$$

Beweis.

$$m^2 = x^2 + y^2$$
$$n^2 = m^2 + z^2$$
$$s^2 = n^2 + v^2$$
$$m^2 + n^2 + s^2 = x^2 + m^2 + n^2 + y^2 + z^2 + v^2$$
$$-m^2 - n^2 = -m^2 - n^2$$
$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 + v^2$$

§. 123. Zusatz. Eben so leicht ist es, Quadrate noch so groß zu machen oder zu verdoppeln. Es darf nur eine Diagonal des Quadrats quadriert werden.

Satz. Fig. 61

$$ab^2 = 2\,ac^2$$

Beweis.

	$ab^2 = ac^2 + cb^2$
Aber	$ac = cb$ als Seite des nämlichen □ts
folglich	$ac^2 = cb^2$
substit.	$ab^2 = ac^2 + ac^2$
abgekürzt	$ab^2 = 2\,ac^2$

§. 126.

§. 124. Zusatz. Auf eine nicht viel ungleiche Art halbiert man auch Quadrate. Man ziehe zwey sich durchkreuzende Diagonalen, so werden gleiche Seiten mit den darauf liegenden Wechselwinkeln, wo jeder wegen der Theilung 45° hat, 4 gleiche Dreyecke bestimmen, und die 4 Scheitelwinkel werden rechte Winkel seyn. Wenn nun so ein rechtwinklichtes gleichschenklichtes Dreyeck zu einen Parallelogram kompliert wird, so kann es eben darum kein anders als ein Quadrat geben, folglich ist der

Satz Fig. 62

$$ac^2 = \tfrac{1}{2}\, ab^2$$

Beweis.

$$ac^2 + cb^2 = ab^2$$

aber $ac = cb$ und

$$ac^2 = cb^2$$

substit. $ac^2 + ac^2 = ab^2$

abgek. $2\,ac^2 = ab^2$

$:2$ $ac^2 = \frac{ab^2}{2}$

oder $ac^2 = \tfrac{1}{2}\, ab^2$

§. 125. Zusatz. Endlich folgt auch noch aus dem obigen Lehrsatze, wie man ein Quadrat von einem anderen gegebnen abziehen müße. Man beschreibe auf einer Seite des größern Quadrats einen Halbzirkel, trage die Seite des andern Quadrats als Sehne darein, so zwar, daß sie mit dem Diameter einen ~~rechten~~ Winkel macht, so ist die andere Sehne die das Dreyeck schließt, die Seite des restierenden Quadrats. Fig. 63

Satz.

$$ab^2 = x - y$$

Beweis.

$$\begin{array}{rcl} ab^2 + ac^2 &=& bc^2 \\ -ac^2 &=& -ac^2 \\ \hline ab^2 &=& bc^2 - ac^2 \end{array}$$

oder $ab^2 = x - y$

Figurenberechnung.

§. 126. **Erkl.** **Eine Flächenfigur messen, oder berechnen, heißt, eine andere zur Einheit angenommene Fläche so oft herum legen in derselben, als es möglich ist.**

§. 127. Zusatz. Da das Quadrat die schicklichste und regulärste Figur ist, so hat man in jedem Lande ein übliches Quadratmaas angenommen, welches, wenn es ein Quadratschuh ist, einen Schuh in der Länge, und einen in der Breite hält. Bedient man sich aber der Quadratruthen, so muß ein solches Maas eine Ruthe lang und eine Ruthe breit seyn. Ein gleiches versteht sich auch vom Zolle u. s. f.

§. 128. **Lehrsatz. Der Inhalt eines Rechteckes ist das Produkt aus der Grundlinie in die Höhe.** Denn die Grundlinie zeigt an, wie viel z. B. Quadratschuhe auf ihr in einer Reihe nebeneinander stehen können, und die Höhe, wie oft diese ganze Reihe von Quadratschuhen in dem Rechteck enthalten sey. Setzen wir, die Grundlinie Fig. 64 sey 4 Schuh lang, also können auf ihr 4 Quadratschuh stehen. Wenn nun ferner die Höhe 3 Schuh hält,

so

so heißt dieß so viel, als, daß diese Reihe von 4 Quadratschuhen 3mal in der ganzen Figur enthalten sey; folglich muß 4 mit 3 multiplicirt werden.

§. 129. Zusatz. Indem Quadratschuhe selbst schon Rechtecke sind, so ist der Inhalt eines solchen Quadratmaases ebenfalls das Produkt aus der Länge und Höhe; das ist $10 \times 10 = 100$ Quadratzolle. Eben so viel Linien hält auch ein Quadratzoll.

§. 130. Zusatz. Weil schiefe Parallelograme den Rechtecken von der nämlichen Grundlinie und Höhe gleich sind, wie oben §. 102. erwiesen worden, so erstreckt sich der obige Lehrsatz §. 128. von Rechtecken auf alle Parallelograme; denn ich darf selbe nur zuerst in Gedanken in Rechtecke von gleicher Grundlinie und Höhe verwandeln, so ist der Lehrsatz anwendbar.

§. 131. Zusatz. Da Dreyecke Hälften von Parallelogramen sind, so muß hier das Produkt aus ihrer Grundlinie und Höhe auch nur halb genommen werden. Dieß geschieht aber, wenn entweder ein Faktor oder das ganze Produkt halbiert wird.

§. 132. Lehrsatz. Da die drey Seiten eines Dreyecks das nämliche Dreyeck völlig bestimmen, so läßt sich, auch ohne Perpendickel, der Inhalt eines gleichseitigen Dreyecks aus der gegebenen Seite; der Inhalt eines gleichschenklichten aus der Grundlinie und einem Schenkel, und der eines ungleichseitigen, aus allen drey Seiten zugleich weit natürlicher finden.

Säze.

Sätze.

I. Der Inhalt eines gleichseitigen Dreyeckes ist demnach, wenn l eine Seite (latus) heißt $= \frac{1}{4} l^2 \sqrt{3}$.

II. Der Inhalt eines gleichschenklichten, wenn c einen Schenkel (crus), und b die Grundlinie (basis) bedeutet, $= \frac{1}{2} b \sqrt{c^2 - \frac{b^2}{4}}$.

III. Der Inhalt eines ungleichseitigen, wenn a, b, c, die Seiten vorstellen,
$= \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$

Beweis des ersten Satzes. Fig. 65 Nro I

Es sey $bd = l = ab = ad$
$bc = cd = \frac{l}{2}$

Nun ist $\triangle abd = \frac{bd \times ac}{2}$ §. 131.

Aber $ac^2 = ab^2 - bc^2$ §. 118.

subst. $ac^2 = l^2 - \frac{l^2}{4}$

$= \frac{4 l^2 - l^2}{4}$

$= \frac{3 l^2}{4}$

$\sqrt{}$ $ac = \sqrt{\frac{3 l^2}{4}}$

$ac = \frac{l}{2} \sqrt{3}$

subſtit. $\triangle abd = \frac{l \times \frac{l \sqrt{3}}{2}}{2}$

$\triangle abd = \frac{l^2}{4} \sqrt{3} = \frac{1}{4} l^2 \sqrt{3}$

Beweis des zweyten Satzes. Fig. 65 Nro II

Es sey $ab = ad = c$
$bd = b$

also

also $bc = cd = \frac{b}{2}$

$ac = p$

Daher ist $\triangle\, abd = \frac{b \times p}{2}$

allein $p^2 = ab^2 - bc^2$

$= c^2 - \frac{b^2}{4}$

$\sqrt{}$ $p = \sqrt{c^2 - \frac{b^2}{4}}$

$\times b \qquad \times b$

$b \times p = b\sqrt{c^2 - \frac{b^2}{4}}$

$: 2$

$\frac{b \times p}{2} = \frac{1}{2} b \sqrt{c^2 - \frac{b^2}{4}}$

Aber $\frac{b \times p}{2} = \triangle\, abd$

$\triangle\, abd = \frac{1}{2} b \sqrt{c^2 - \frac{b^2}{4}}$

Beweis des dritten Satzes. Fig. 65 Nro III

Man heiße $ab = a$

$bd = b$

$ad = c$

$bc = x$

so ist $cd = b - x$

$ac = p$

Es ist mehrmal $\triangle\, abd = \frac{b \times p.}{2}$

Also für p einen Werth in bekannten Ausdrücken gesucht.

$ac^2 = ab^2 - bc^2$

$ac^2 = ad^2 - cd^2$

$ab^2 - bc^2 = ad^2 - cd^2$ und substit.

$$a^2 - x^2 = c^2 - (b - x)^2$$
$$a^2 - x^2 = c^2 - b^2 + 2bn - x^2$$
$$\underline{\quad + x^2 \qquad\qquad\qquad\qquad + x^2}$$
$$a^2 = c^2 - b^2 + 2bx$$
$$a^2 - c^2 + b^2 = 2bx \qquad 2b:$$
$$\frac{a^2 - c^2 + b^2}{2b} = x$$

Weil nun $ac^2 = ab^2 - bc^2$
oder $p^2 = a^2 - x^2$
so ist $x^2 = a^2 - p^2$
und $x = \sqrt{a^2 - p^2}$
Aber $x = \dfrac{a^2 - c^2 + b^2}{2b}$

$$\sqrt{a^2 - p^2} = \frac{a^2 - c^2 + b^2}{2b}$$

$$a^2 - p^2 = \frac{a^4 - 2a^2c^2 + 2a^2b^2 + c^4 - 2c^2b^2 + b^4}{4b^2}$$

$$p^2 - a^2 = \frac{2a^2c^2 - a^4 - 2a^2b^2 - c^4 + 2c^2b^2 - b^4}{4b^2}$$

$$p^2 = \frac{2a^2c^2 - a^4 - 2a^2b^2 - c^4 + 2c^2b^2 - b^4}{4b^2} + a^2$$

$$p^2 = \frac{2a^2c^2 - a^4 - 2a^2b^2 - c^4 + 2c^2b^2 - b^4 + 4a^2b^2}{4b^2}$$

$$p^2 = \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - c^4 - b^4}{4b^2}$$

Aber $2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - c^4 - b^4$
$= (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$

subst. $p^2 = \dfrac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{4b^2}$

$$\sqrt{\ }\ p = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}{2b}$$

$\times b$

$b \times p$

$$b \times p = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c(-c+b+c)}}{2}$$

$$:2\ \frac{b \times p}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-+b+c)(-a+b+c)} = \Delta\ abd$$

§. 133. **Anmerk.** Um ein Beyspiel von der praktischen-Anwendung dieses Satzes zu geben, so berechne man den Torfgrund in der Gegend von Chiemsee, der ein Dreyeck bildet, wobon die Seiten nach der Angabe des baierischen Landboten von 1790, 10ten Stücks 5830, 7060 und 8246 Füße halten. Der stitzierte Ausdruck wäre also nach der Formel

$\frac{1}{4}\sqrt{(5830+7060+8246)(5830+7060-8246)(5830-7060+8246)(-5830+7060+8246)} = \frac{1}{4}\sqrt{21136 \times 4644 \times 7016 \times 9476} = \frac{1}{4}\sqrt{6525738154911744} = \frac{1}{4} \times 80782041 = 20195510\frac{1}{4}$

Das ist beynahe 505 Jouchárte, das Jouchart zu 40000 Quadratschuhe gerechnet.

§. 134. **Zusatz.** Wir haben oben gezeigt, daß sich jedes Trapez, jedes Polygon in Dreyecke zerfällen läßt. Alle Dreyecke aber, wenn Höhe und Grundlinie überall bestimmt wird, oder wenn die Seiten derselben bekannt sind, können berechnet werden. Folglich sind wir im Stande jede geradlinichte Figur, wo nicht auf einmal, doch theilweis zu berechnen, und am Ende die gefundenen Resultate zusamm zu addieren.

§. 135. **Lehrsatz.** Wenn ein Trapez zwo Parallelseiten hat, so ist auch der Inhalt nach einer kürzern Rechnung, gleich dem halben Produkt aus der Summe der Parallelseiten in die Parallelweite.

Satz. Fig. 66

$$abcd = \frac{(ab+cd)\ bf}{2}$$

Beweis.

Beweis.

Man ziehe eine beliebige Diagonal, so entstehen zwo Dreyecke von einerley Höhe. Es ist nun

$$bcd = \frac{cd \times bf}{2}$$

$$abc = \frac{ab \times bf}{2}$$

$$bcd + abc = \frac{cd \times bf + ab \times bf}{2}$$

Anders ausgedrückt $= \frac{(ab + cd) \times bf}{2}$

In der Figur $abcd = \frac{(ab + cd) \times bf}{2}$

§. 136. Anmerk. Wie allerley krummlinichte Flächen berechnet werden müssen, gehört theils in die praktische, theils in die höhere Geometrie. Weiter unten soll auch die Berechnung der Zirkelfläche vorkommen.

Aehnlichkeit der Figuren und ihre Verhältnisse zu einander.

§. 137. Lehnsatz. Aehnlichkeit hat alles, was bloß in der Größe unterschieden ist.

§. 138. Zusatz. Da in den Dreyecken, Quadraten und regulären Vielecken bey der Größe alles auf die Seiten ankömmt, und die Winkel durchaus nichts dazu beytragen, so sind sie einander ähnlich, wenn sie einerley Winkel haben; denn nur in diesem Falle sind sie alleinig in der Größe unterschieden.

§ 139. Zusatz. Diesem Begriff zufolge müßen alle Quadrate, gleichseitige, rechtwinklichtgleichschenklichte Dreyecke und gleichnamige Polygone an

und

und für sich schon einander ähnlich seyn; weil die Winkel in solchen Quadraten, in solchen Dreyecken u. s. f. immer die nämlichen sind.

§. 140. Lehrsatz. Zwey Parallelograme von einerley Höhe verhalten sich wie die Grundlinien.

Satz. Fig. 67.

$$x : y = cb : bd$$

Beweis.

$$x = cb \times ab$$
$$y = bd \times ab$$

$$x : y = cb \times ab : bd \times ab \qquad :ab$$
$$x : y = cb : bd$$

§. 141. Lehrsatz. Zwey Parallelograme verhalten sich wie die Höhen, im Falle die Grundlinien gleich sind.

Satz. Fig. 68

$$x : y = ad : ac$$

Beweis.

$$x = ad \times ab$$
$$y = ac \times ab$$

$$x : y = ad \times ab : ac \times ab$$
$$x : y = ad : ac \qquad :ab$$

§. 142. Zusatz. Weil die Dreyecke Hälften von Parallelogramen sind, so gelten auch beyde obige Sätze von ihnen; das heißt: Die Inhalte zweyer Dreyecke von einerley Grundlinie verhalten sich wie ihre

Höhen:

Höhen: sind aber die Dreyecke von einerley Höhe, wie ihre Grundlinien. Wir wollen den letztern Satz zum Ueberfluße erweisen.

Satz. Fig. 69

$$x : y = cd : fg$$

Beweis.

$$x = \frac{cd \times ab}{2}$$

$$y = \frac{fg \times ab}{2}$$

$$x : y = \frac{cd \times ab}{2} : \frac{fg \times ab}{2} \qquad \times 2$$

$$x : y = cd \times ab : fg \times ab \qquad : ab$$

$$x : y = cd : fg$$

§. 143. Lehrsatz. Wenn man in einem Dreyecke, wo man will, mit der Basis eine Parallelinie von einer Seite zur andern zieht, so stehen

I die Abschnitte unter sich im Verhältniße;

II die obern Abschnitte mit den ganzen Seiten;

III die unteren Abschnitte mit den ganzen Seiten, und

IV ein oberer Abschnitt zum Parallelschnitt wie die dem Abschnitt ähnlich liegende ganze Seite zur Basis. Wir werden eins nach dem andern erweisen.

Erster Satz.

$$ab : bc = af : fd$$

Beweis.

Beweis.

Man ziehe im entstandenen Trapez Diagonalen, so wird wegen gleicher Höhe und Grundlinie seyn Fig. 70

$\triangle$ bfc = $\triangle$ bdf

Ferner abf : bfc = ab : bc
und abf : bfd = af : fd
substit. : (bfc)

ab : bc = af : fd

144. Anmerk. Man kann sich leicht vorstellen, wie oft sich dieser Satz im Anschreiben, gemäß der Proportionslehre, modificieren läßt.

Zweyter Satz.

ab : bc = af : ad

Beweis.

Erwiesen ist, daß ab : bc = af : fd
folglich auch, daß ab : (bc+ab) = af : (fd+af)
in der Figur ab : ac = af : ad

§. 145. Anmerk. Dieser zweyte Satz, so wie auch der folgende ließe sich unmittelbar aus der Figur selbst erweisen. Zum Ueberfluße wollen wir die Art des Beweises ganz hersetzen.

Es ist $\triangle$ bfc = $\triangle$ bfd
abf = abf

bfc + abf = bfd + abf
in der Figur $\triangle$ afc = $\triangle$ abd

Nun abf : afc = ab : ac
und abf : abd = af : ad
substit. : (afc)

ab : ac = af : ad.

Drit-

Dritter Satz.

$cb : ca = df : da$

Beweis.

$ab : cb = af : fd$

oder $cb : ab = fd : af$

Nun ist $cb : (ab + cb) = fd : (af + fd)$

In der Fig. $cb : ca = df : da$

Vierter Satz. Fig. 71

$ab : ac = bf : cd$

Beweis.

Man ziehe mit der ganzen Seite, die im Satze vorkömmt, aus dem gegenüber stehenden Durchschnittspunkte der andern Seite eine Parallellinie, so ist erstens

$af : ad = ab : ac$ und wenn

ac die Basis $af : ad = ch : cd$

$ab : ac = ch : cd$

aber $ch = bf$ wegen Parallelismus

substit. $ab : ac = bf : cd$

§. 146. **Aufgabe.** Eine gerade Linie, wie wir oben §. 45. versprochen, in drey, oder auch in mehrere Theile zu theilen.

Auflösung. Man ziehe über der gegebnen Linie eine andere damit parallel, schneide durch Hilfe des Handzirkels 3 gleiche Stücke ab, die aber zusamm genommen kleiner als die gegebne Linie seyn müßen; verbinde die Endpunkte der gegebnen und getheilten Linie durch zwo andere, und verlängere diese letzten bis sie sich durchschneiden; so theilen jene Linien, wel-

che aus eben diesem Scheitel durch die Theilungspunkte gezogen und gehörig verlängert werden, die gegebene Linie in die verlangten gleichen Theile.

Satz. Fig. 72

ab = bc = cd

Beweis.

Weil in jedem der drey entstandenen Dreyecke mit der Grundlinie eine andere Linie parallel gezogen ist, so verhält sich

$$kf : kb = lf : ab$$

und $$kf : kb = fg : bc$$

$$lf : ab = fg : bc$$

aber $lf = fg$ aus der Konstruktion

substit. $fg : ab = fg : bc$

$$bc \times fg = ab \times fg$$

fg: $bc = ab$

Ferner $kg : kc = fg : bc$

$$kg : kc = gh : cd$$

$$fg : bc = gh : cd$$

aber $fg = gh$ wie oben

substit. $gh : bc = gh : cd$

$$gh \times cd = bc \times gh$$

gh: $cd = bc$

Vorher war $bc = ab$

Folglich auch $bc = cd = ab$

§. 147. Anmerk. Eben so leicht läßt sich auch jede gerade Linie in mehrere gleiche Theile theilen. Gut wird es seyn, wenn die angenommene Linie sehr nahe an der gegebenen parallel gezogen, und wenn die Theile, so groß als thunlich ist, gemacht werden.

§. 148. **Lehrsatz.** Wenn in einem Dreyecke ein Winkel in zween gleiche Theile getheilt und die Theilungslinie bis zur Gegenseite verlängert wird, so verhalten sich die Segmente dieser Seite, wie die daranstoßenden übrigen zwo Seiten oder Schenkel.

Satz. Fig. 73

$ab : bc = ad : dc$

Beweis.

Man verlängere einen Schenkel um die Größe des andern Schenkels rückwärts, und schliesse den neuentstandenen Winkel zu einem Dreyecke. Es ist demnach $o + m = 2y$ als äußerer Winkel im gleichschenk. △ §. 80.

aber $o = m$

substit. $m + m = 2y$

abgek. $2m = 2y$

:2 $m = y$, und weil dieß Wechselw. sind.

bd parallel mit cf

Also in dem △ acf nach §. 143. Nro IV

$ab : bc = ad : df$

aber $df = cd$ aus der Konstrukt.

substit. $ab : bc = ad : cd.$

§. 149. **Lehrsatz.** In ähnlichen Dreyecken, das heißt, in solchen, wo die Winkel, überall die nämlichen sind, stehen jene Seiten im Verhältniße, deren Gegenwinkel gleich sind.

Es sey in den zwey Dreyecken Fig. 74

$a = f$

$d = g$

und $l = h$ so ist z. B. der

Satz

Satz

$ad : al = fg : fh$

Beweis.

Man schneide die zwo Seiten des kleinen Dreyecks, die im Satze begriffen sind, von den zwo ähnlich liegenden Seiten des großen Dreyeckes, vom Scheitelpunkte des nämlichen Winkels angefangen, ab, und verbinde die Abschnittspunkte durch eine Linie, so ist

$ab = fg$ } Aus der Konstrukt.
$ac = fh$ }
$a = f$ aus der Voraussf.
Also $\Delta\, abc \cong \Delta\, fgh$ und
$o = g$ wegen gleichen Gegenseiten
aber $d = g$ aus der Voraussf.

Folgl. $o = d$ Nun ist wegen der Gleichheit des äußern und innern Winkels

bc parallel mit dl also §. 143. Nro II

$ab : ad = ac : al$
subst. $fg : ad = fh : al$
veränd. $ad : fg = al : fh$
mehrmal $ad : al = fg : fh$

§. 150. **Anmerk.** Bringt man die übrige Seite in die Proportion, so werden die Abschnitte von jenen zwo ähnlich liegenden Seiten den nämlichen Winkel wie die kleinen Seiten des andern Dreyeckes einschliessen.

§. 151. **Lehrsatz.** Auch in ähnlichen Vielecken stehen jene Seiten im Verhältniße, deren Gegenwinkel gleich sind, oder was eines ist, welche eine ähnliche Lage in beyden Vielecken haben.

Satz. Fig. 75

$ab : ac = ld : lh$

Beweis.

Man schneide wie vorher die Seiten des kleinen Polygons, von den ähnlichen Seiten des großen Polygons ab, so ist nach gezogener parallelen Diagonal,

$o = n$; weil nun
auch wie vorher $m = o$
also $n = m$ folglich
$lk : lf = ld : lh$
substit. $ab : ac = ld : lh$

§. 152. Zusatz. Eben so leicht ist es zu erweisen, daß auch ähnlich liegende Diagonalen untereinander, oder mit ähnlich liegenden Seiten in Proportion, stehen wenn die Vielecke selbst ähnlich sind.

§. 153. Lehrsatz. In ähnlichen Dreyecken stehet ferner auch jede ähnlichliegende (homologe oder respondierende) Seite mit derley Perpendikel im Verhältniße.

Sätze. Fig. 76

1) $ac : lf = ab : lg$
2) $cd : fh = ab : lg$

Beweis.

1) Weil $o = m = 90$
und $c = f$ so ist
$\Delta\, acb \backsim \Delta\, flg$ folglich
$ac : lf = ab : lg$

2) Es

2) Es ist ohnehin $\triangle$ acd $\backsim$ $\triangle$ lfh

$$
\begin{array}{ll}
\text{also} & ac : lf = cd : fh \\
\text{aber} & ac : lf = ab : lg \\
\hline
\text{Folgl.} & cd : fh = ab : lg
\end{array}
$$

§. 154. Zusatz. Es ist demnach analogisch richtig, daß sich dieser Satz auch auf Polygone ausdehnen läßt.

§. 155. **Lehrsatz.** Die Inhalte ähnlicher Dreyecke verhalten sich wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten.

Satz. Fig. 77

$$X : Y = ab^2 : cd^2$$

Beweis.

Man fälle auf jene zwo Seiten, welche im Satze vorkommen, Perpendikel, so ist erstens

$$
\begin{array}{ll}
 & lf : gh = ab : cd \\
\text{aber} & ab : cd = ab : cd \\
\hline
 & lf \times ab : gh \times cd = ab^2 : cd^2 \\
:2 & \frac{lf \times ab}{2} : \frac{gh \times cd}{2} = ab^2 : cd^2
\end{array}
$$

In der Figur $X : Y = ab^2 : cd^2$

§. 156. Zusatz. Weil in ähnlichen Polygonen durch ähnlich gezogene Diagonalen immer zwey und zwey ähnliche Dreyecke entstehen, so verhalten sie sich, wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Linien. Wiederholt man demnach die Proportion so oft, als viele Dreyecke da sind, so bekömmt man lauter ähnliche Verhältnisse; wo sich die Summen sämmtlicher

Vorderglieder, welches die Polygone selbst sind, wie die einzelnen Glieder eines hintern Verhältnisses verhalten. Z. B. es wäre der

Satz Fig. 78

$$acdlb : fghkq = ab^2 : qk^2$$

Beweis.

Da zwo ähnliche Dreyecke mit den Quadraten was immer für gleichliegender Linien im Verhältnisse stehen, so ist es hier gleichgültig, mit welchen Seitenquadraten man die übrigen Dreyecke in Proportion stellt, wenn nur die ersten zwey die Satzseiten erhalten.

Es ist also $\triangle\ acb : \triangle\ fqk = ab^2 : qk^2$
Eben so $\triangle\ cbd : fkg = cd^2 : fg^2$
und $\triangle\ dlb : ghk = db^2 : gk^2$ wegen ähnlich liegenden Linien.

$$(acb + cdb + dlb) : (fqk + fkg + ghk) = ab^2 : qk^2$$
oder $acdlb : fghkq = ab^2 : qk^2$

§. 157. Anmerk. Daraus läßt sich folgende Frage beantworten. Der ganze Plan einer aufgenommenen Gegend faßt genau $3\frac{1}{2}$ Quadratfuß landesüblichen Maaßes in sich. Eine gewisse Linie davon, welche auf dem Felde 1000 Fuß gemessen, beträgt hier gerade $\frac{1}{4}$ Fuß. Wie viel Quadratschuh mag wohl die aufgenommene Landschaft wirklich groß seyn?

Auflösung. Da es eine der Haupteigenschaften jedes Plans seyn soll, die aufgenommene Revier in einer ähnlichen Figur vorzustellen, so muß die Proportion gelten

$$\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 : 1000^2 = 3\tfrac{1}{2} : x$$
$$\tfrac{1}{16} : 1000000 = \tfrac{7}{2} : x$$
$$\tfrac{x}{16} : \underline{7000000} = 3500000$$
$$2$$

$$x = 3500000 \times 16 = 56000090 \text{ Quadratfuß.}$$

Vom

Vom Zirkel.

§. 158. **Lehrsatz.** In ein und dem nämlichen Zirkel korrespondieren gleichen Sehnen auch gleiche Bögen.

Voraussetzung. Fig. 79

hf = ad

Satz.

hgf = abd

Beweis.

Man ziehe Radiusse auf der Sehnen Endpunkte; so ist

	hc	=	ac	als Radiusse.
	cf	=	cd	
und	hf	=	ad	aus der Voraussf.
also	△ hcf	≌	△ acd	und
	σ	=	m	folglich auch ihre Maase
	hgf	=	abd	

§. 159. **Lehrsatz.** In ein und dem nämlichen Zirkel korrespondieren auch umgekehrt gleichen Bögen gleiche Sehnen.

Voraussetzung.

fgh = abd

Satz.

fh = ad

Nach gezogenen Radiussen ist wie oben

Beweis.

Beweis.

$hc = md$
$fc = ca$
$o = m$ weil ihre Maase gleich sind
also $\Delta\, hcf \cong cad$ und
$fh = ad$

§. 160. **Lehrsatz.** Jeder Perpendikel, welcher eine Sehne im Zirkel in zween gleiche Theile theilt, wird zum Diameter, wenn man ihn gehörig verlängert.

Voraussetzung. Fig. 80

$o = m$ und
$bc = cd$

Satz.

$af =$ Diametro oder
$albkf = ahdgf.$

Beweis.

Man verbinde die Endpunkte der Sehnen mit neuen Sehnen, so ist

$bc = cd$
$ac = ac$
$o = m$
also $\Delta\, abc \cong \Delta\, acd$ und
$ab = ad$ folglich auch
$bla = ahd$

Ferner $cf = cf$
$bc = cd$
$x = y$ also wiederum

Δ

$\triangle$ bcf $\cong$ $\triangle$ cdf und
bf = df daher auch
bkf = dgf
Nun bla = ahd, wie erwiesen worden.

adb. bkf + bla = dgf + ahd
In der Figur albkf = ahdgf
oder was eins ist, af = Diametro.

§. 161. Zusatz. Jeder Diameter also, der eine Sehne perpendikulär schneidet, theilet Sehne und Bogen in zween gleiche Theile.

§. 162. Aufgabe. Durch drey gegebene Punkte, die aber nicht in gerader Linie liegen dörfen, einen Zirkel zu beschreiben.

Auflösung und Beweis. Fig. 81 Man verbinde die Punkte durch zwo Linien, oder denke sich wenigst diese Verbindung; theile sie als Sehnen durch Perpendikel in zween gleiche Theile, so werden diese Perpendikel Diameterrichtungen des nämlichen Zirkels seyn. Weil sich aber diese nur in einem einzigen Punkte durchschneiden und zwar im Mittelpunkte, so ist der Durchschnittspunkt dieser verlängerten Perpendikel der Mittelpunkt eines Zirkels, der zu jenen Sehnen gehört, und deren Endpunkte dann nothwendig in der Peripherie liegen müssen.

§. 163. Zusatz. Daraus erhellet von selbst, wie um jedes Dreyeck ein Zirkel beschrieben werden könne, wenn die drey Winkelpunkte als gegebene Punkte betrachtet werden.

§. 164. Lehrsatz. Die Bögen zwischen parallelen Sehnen eines Zirkels sind gleich.

Satz.

Satz. Fig. 82

$$bc = qg$$

Beweis.

Man ziehe mit den zwo Sehnen auch noch den Diameter parallel, im Fall keine von den Sehnen selbst ein Diameter ist, fälle von den Endpunkten der Sehnen auf den Diameter Perpendikel, so werden dieses halbierte Sehnen seyn, welche gleichen halbierten Bögen entsprechen, folglich weil

$fc = lg$ } als Zwischenparallelen
und $db = kq$ }
so ist auch $ac = ig$
und $ab = iq$

also $ac - ab = ig - iq$.
In der Figur $bc = qg$.

§. 165. Zusatz. Es sind diesemnach auch jene Bögen in einem Zirkel gleich, welche zwischen einer Tangente und einer parallelen Sehne liegen; denn man denke sich Fig. 83 von der Sehne bis zur Tangente lauter parallele Sehnen, so wird die letzte, welche wegen beständigen Abnehmen zum Punkte geworden, in der Tangente selbst liegen, folglich ist $ab = bc$

§. 166. Anmerk. Nun läßt sich jener Satz, daß ein Winkel, den eine Sehne mit der Tangente macht, den Bogen, der zwischen der Tangente und Sehne liegt, zum Maase habe, nach aller Strenge beweisen. Es wäre also

Satz. Fig. 84

$$x = \frac{bdf}{2}$$

Beweis.

Beweis.

Man ziehe aus dem andern Endpunkte der Sehne eine Parallelsehne mit der Tangente, so ist

$$m = x$$
$$m = \frac{acb}{2}$$
$$\text{also} \quad x = \frac{acb}{2}$$
$$\text{aber} \quad acb = bdf,$$
$$\text{subst.} \quad x = \frac{bdf}{2}$$

So auch der Satz, daß der Winkel, den zwo Tangenten machen, die halbe Differenz jener Bögen zum Maaße habe, welche die Tangentialpunkte bestimmen; nämlich daß Fig. 85. $m = \frac{bca - ba}{2}$ sey. Denn, wenn aus einem Tangentialpunkte eine Sehne mit der andern Tangente parallel gezogen wird, so ist

$$x = m$$
$$x = \frac{ac}{2}$$
$$m = \frac{ac}{2}$$
$$\text{aber} \quad ac = bca - bc \text{ und weil } bc = ab, \text{ ist}$$
$$ac = bca - ab \text{ subst. giebt.}$$
$$m = \frac{bca - ab}{2}$$

§. 167. Lehrsatz. Wenn sich zwo Sehnen innerhalb des Zirkels schneiden, sind die Produkte aus den zwey Segmenten jeder der beyden Sehnen gleich: schneiden sie sich aber außerhalb, so sind die Produkte aus den verlängerten Sehnen in ihre Segmente außer dem Zirkel ebenfalls gleich.

Satz

Satz für den ersten Fall. Fig. 86

$$bc \times cd = ac \times cf$$

Beweis.

Man schließe die Vertikalwinkel mit Sehnen, so ist

$$\left.\begin{array}{l} b = \frac{1}{2}\,ad \\ f = \frac{1}{2}\,ad \end{array}\right\} \text{als Peripherialw.}$$

also $b = f$

Eben so ist $d = a$

und $o = m$ folglich

$\triangle\, abc \backsim \triangle\, cdf$ und

$bc : ca = cf : cd$ also

$bc \times cd = ca \times cf.$

Satz für den zweyten Fall. Fig. 87

$$ad \times ab = af \times ac$$

Beweis.

Man beschreibe durch Hilfe zwoer anderer Sehnen ein Trapez im Zirkel, so wird

$o + n = 180°$ seyn §. 96

$x + o = 180$ als Nebenw.

$o + n = x + o$

$-\,o \qquad -\,o$

$n = x$ ferner

$a = a$

also $m = y$ folglich

$\triangle\, abc \backsim \triangle\, adf$ und

$ad : af = ac : ab$ also

$ad \times ab = af \times ac$

§. 168.

§. 168. **Zusatz.** Geschieht es, daß eine Sehne innerhalb des Zirkels die andere im Durchschneidungspunkte halbieret, so ist das Quadrat der halben Sehne gleich dem Produkt der Segmente der andern Sehne.

Satz. Fig. 88

$$cb^2 = ab \times bh$$

Beweis.

$$cb \times bd = ab \times bh$$
aber $cb = bd$
subst. $cb \times cb = ab \times bh$
abgek. $cb^2 = ab \times bh$

§. 169. **Anmerk.** Dieser ordentlich abgeleitete Zusatz wird fast in allen mathematischen Lehrbüchern gewöhnlich als ein selbstständiger Lehrsatz so vorgetragen: Ein auf den Diameter des Zirkels herabgefällte Perpendikel ist die mittlere Proportionallinie zwischen den Segmenten des Diameters, und könnte unabhängig von dem vorhergehenden Lehrsatze so erwiesen werden.

Satz.

$$ab^2 = db \times bf$$

Beweis.

Man ziehe aus dem Endpunkte des Perpendikels einen Radius, so ist

I weil $dc = cf = ac = r$ welches r den Radius vorstellt.
$db = r - bc$
$bf = r + bc$

mult. $db \times bf = r^2 - bc^2$
II $ab^2 = r^2 - bc^2$ nach pyth. Lehrs.

Also $ab^2 = db \times bf.$

So

So wollte Klemm diesen Satz erweisen, obwohl sein Beweis weit gedehnter und verworner ausfiel. Er fügte noch überdieß einen Beweis aus der Aehnlichkeit der Dreyecke bey. Alles dieß schadet nichts, um zu zeigen, daß man auf ganz verschiedenen Wegen zur mathematischen Wahrheit gelangen könne: ich sehe aber nicht ab, warum man diesen besondern Fall nicht eben so gut, oder noch richtiger aus dem vorigen allgemeinen Lehrsatze herleiten sollte.

§. 170. Zusatz. Es ist nun leicht jedes Parallelogram in ein Quadrat zu verwandeln; denn es darf nur seine Höhe an die Länge in der nämlichen Richtung gesetzt, über die ganze Linie ein halber Zirkel geworfen, und auf dem Zusammstoßungspunkte der Höhe und Länge ein Perpendickel errichtet werden, so ist dieß die Seite des verlangten Quadrats.

Satz. Fig. 90

$$X = Y$$

Beweis.

$$ab^2 = bc \times bf$$
aber $bd = bc$
substit. $ab^2 = bd \times bf$ oder
$$X = Y$$

§. 171. Anmerk. Klemm (in seinem Lehrbuche) verspricht früh vor diesem Satze schon §. 487. ein Parallelogram in ein Quadrat zu verwandeln und baut auf diese Supposition sogar Zusätze, als z. B. §§. 495, 508; leistet es aber nirgends, und wird es auch bis dahin wohl schwerlich zu leisten im Stande seyn.

§. 171. Zusatz. Aus obigem Satze fließt auch die Methode, die Quadratwurzel aus jeder Zahl durch

Zeichnung oder Konstruktion zu finden. Man schneide nämlich von einer Linie so viel gleiche Theile ab, als viele Einheiten die Zahl hat, und noch einen Theil dazu, werfe nun über diese Theile einen halben Zirkel, und richte auf dem ersten Theilungspunkt einen Perpendikel auf, so drückt er die Quadratwurzel von der verlangten Zahl aus. Z. B. es soll aus 5 die Wurzel gezogen werden; so schneide man von einer Linie 6 gleiche Stücke ab, und verfahre, wie gesagt worden.

Satz. Fig. 91

$$ab = \sqrt{5}$$

Beweis.

$$ab^2 = cb \times bd$$

aber $cb = 1$

und $bd = 5$

folgl. subst. $ab^2 = 1 \times 5$ oder

$ab^2 = 5$

also $ab = \sqrt{5}$.

§. 173. Zusatz. Es kann eine Sehne, wie schon öfter erinnert worden, so klein werden, daß sie einem Punkt gleicht, aber doch noch eine Linie bleibt, folglich, wenn man sie verlängert eine Tangente vorstellt, weil sie bloß in die Peripherie, und nicht in die Zirkelfläche fällt. Wenn nun eine andere Sehne von einem ihrer Endpunkte so lange außerhalb fortgezogen wird, bis sie die Tangente schneidet, welche wiederum beyderseits verlängert werden kann, so ist, vorausgesetzt daß die Tangente nicht mit der Sehne parallel läuft, das Quadrat der Tangente

so groß, als das Produkt aus der verlängerten Sehne in das Stück außer der Peripherie.

Satz. Fig. 92

$$ab^2 = bd \times bc$$

Beweis.

Weil ein einziger Punkt die verlängerte Sehne weder kürzer noch länger macht, so ist

$$ab \times ab = bd \times bc$$

Das ist $ab^2 = bd \times bc$

§. 174. **Anmerk.** Strenger läßt sich dieser abgeleitete Satz aus der Aehnlichkeit der Dreyecke erweisen; denn man ziehe aus dem Tangentialpunkte Linien an die Endpunkte der Sehne, so ist Fig. 93

$\Delta\, abc \backsim abd$

Denn $x = \frac{bc}{2}$ als Sehnenwinkel mit der Tang.

auch $d = \frac{bc}{2}$ als Peripherialw.

also $x = d$

ferner $a = a$

folglich auch $m = (x + y)$

Nun $ab : ac = ad : ab$

$ab^2 = ac \times ad$

§. 175. **Anmerk.** Klemm schränkt diesen Satz blos auf den Fall ein, wenn die Tangente mit seinem Diameter verbunden, und aus dem andern Endpunkte desselben, dieser Tangente eine Hypothenuse, wie er sich ausdrückt, entgegen gezogen wird; er beweist zweytens diesen Satz ganz unabhängig vom Hauptsatze; obwohl nichts natürliches als dessen Ableitung von selbem ist. Was seine Gründe hiezu waren, ist mir ein Räthsel.

§. 176. **Anmerk.** Auf eine ähnliche Art fand ich einen neuen Beweis für den pythagorischen Lehrsatze. Man beschreibe mit einer Lothe aus dem anliegendem schiefen Winkel

fel einen Zirkel durch das Dreyeck, so hat man den obenerwiesenen Fall, wenn die andere Lothe zuvor um den Radius rückwärts verlängert worden.

Satz. Fig. 94

$$db^2 = ad^2 + ab^2$$

Beweis.

$ad^2 = dc \times df$

Aber $dc = db + ab$ oder bc ⎫ als Radius
und $df = db - ab$ oder fb ⎭

substit. $ad^2 = (db+ab) \times (db-ab)$

$ad^2 = db^2 - ab^2$

$ad^2 + ab^2 = db^2$

§. 177. Zusatz. Was immer für zwo Tangenten eines Zirkels, die einander durchschneiden, haben, wie schon erwiesen worden, vom Berührungspunkte bis zum Durchschnittspunkt gleiche Länge; denn es ist Fig. 95

$ab^2 = ac^2$

$\sqrt{\ } \quad ab = ac$

§. 178. Zusatz. Daraus folget eine leichte Art wie in jeden Winkel ein Zirkel beschrieben werden könne, so daß er die beyden Schenkel berühre. Man theile nämlich Fig. 96 den Winkel in zween gleiche Theile o und m, und errichte auf einem gegebenen Punkt, z. B. b, einen Perpendikel bis an die Theilungslinie a c, so ist dieß der Radius welcher auf der Tangente a b perpendikulär seyn muß.

§. 179. Aufgabe. In jedes Dreyeck einen Zirkel so hinein zu beschreiben, daß die Seiten des Dreyecks Tangenten dieses Zirkels werden.

Auflö-

Auflösung. Man theile Fig. 97 ein Paar Winkel in zween gleiche Theile, lasse die Theilungslinien einander durchkreuzen und fälle aus diesem Durchschnittspunkte Perpendikel auf jede der Seiten herab, so werden diese Perpendikel gleich, folglich Radiusse ein und des nämlichen Zirkels seyn, und die Seiten werden eben darum §. 93 Tangenten vorstellen.

Satz 3.

$$cf = ch = cg$$

Beweis.

I		$x = v$	als rechte Wink.
		$y = z$	wegen der Theilung
	also	$o = m$	
		$cd = cd$	
	folglich	$\triangle\, fcd \cong chd$	
	und	$cf = ch$	
II		$\psi = \omega$	
		$s = r$	
	also	$\phi = \lambda$	
	und weil	$ac = ac$	so ist wieder
		$\triangle\, afc \cong agc$	und
		$cf = cg$	
	aber	$cf = ch$	
	folgl.	$cf = ch = cg$	

§. 180. **Lehrsatz.** Ein Quadrat, in welches ein Zirkel beschrieben ist, ist noch einmal so groß als jenes, das sich in den nämlichen Zirkel selbst hinein schreiben läßt.

Erläuterung. Hier werden zwo Auflösungen vorausgesetzt, die also zuerst gezeigt werden müssen.

Das

Das erste zu bewerkstelligen ist nicht schwer: es dürfen z. B. Fig. 98 nur die Diagonalen in dem Quadrate gezogen werden, so weiß man, daß sie sich im Mittelpunkte der Figur halbieren. Hier wird also der Handzirkel eingesetzt, und bis zu der Mitte einer Seite eröffnet, so wird dieß der Radius des verlangten Zirkels seyn. Eben so leicht ist die zweyte Foderung. Man errichte nämlich auf einem gezognen Diameter zu beyden Seiten überall ein gleichschenklichtes Dreyeck, dessen Höhe der Radius ist: so hat man mehrmal das verlangte Quadrat. Leichtigkeitshalber kann der Diameter des Zirkels mit einer Seite des größern Quadrats parallel laufen.

Satz.

$$fg^2 = 2\,ad^2$$

Beweis.

	$ab^2 = ad^2 + db^2$	
aber	$ab = fg$	als Paralleln zwischen Parall.
Folglich	$ab^2 = fg^2$	
so ist auch	$ad = db$	
und	$ad^2 = db^2$	
Subst.	$fg^2 = ad^2 + ad^2$	
abgek.	$fg^2 = 2\,ad^2$	

§. 181. Zusatz. Wenn man die Peripherie in etliche gleiche Theile abtheilt, welches durch Hilfe eines sogenannten Transportärs leicht geschehen kann, und zu diesen Bögen die Sehnen zieht, so erhält man reguläre Polygone: denn gleiche Bogen haben gleiche Sehnen; also sind fürs erste die Seiten alle gleich. Fürs zweyte bilden die Polygonwinkel lauter Peripherialwinkel, wo jeder zum Maaße die halbe Peripherie weniger einen solchen aliquoten Bogen erhält.

Satz. Fig. 99

$x = \frac{P}{2} - ad$; wo P die Peripherie und ad den Bogen bedeutet.

Beweis.

$$abc = \frac{P}{x} - ad - dc.$$

Aber $ad = dc$. §. 158.

Substit. $abc = P - ad - ad = P - 2ad$.

$:2 \quad \frac{abc}{2} = \frac{P}{2} - ad$.

Weil auch $\frac{abc}{2} = x$ §. 83.

So ist $x = \frac{P}{2} - ad$.

§. 182. Erkl. Wenn man aus dem Mittelpunkte des Zirkels, oder vielmehr des Polygons auf die Endpunkte einer Seite oder Sehne Radiusse zieht, so heißt ein solcher zwischen zween Radiussen eingeschloßner Winkel ein Zentriwinkel, zum Unterschiede der Polygonwinkel, die immer zwo und zwo Seiten des Polygons mit einander bilden.

§. 183. Zusatz. Es hat also jedes Polygon so viele Zentriwinkel als Seiten.

§. 184. Zusatz. Weil die Seiten lauter gleiche Sehnen sind, und gleiche Sehnen gleiche Bögen haben, so müssen nothwendig alle Zentriwinkel einander gleich seyn; indem ihr Maas ebenfalls gleich ist.

§. 185. Zusatz. Da ferner alle Winkel um einen Punkt 360° halten, so findet man den Inhalt eines solchen Zentriwinkels, wenn 360 durch die Anzahl der Seiten dividiert werden: also ist allgemein $c = \frac{360}{n}$

§. 186.

§. 186. Lehrsatz. Jeder Polygonwinkel ist gleich zween rechten Winkeln weniger dem Zentriwinkel.

Satz. Fig. 99

$$x = 180 - \frac{360}{n}$$

Beweis.

Es ist oben erwiesen worden, daß

$$x = \frac{p}{2} - dc$$

Aber $dc = \frac{360}{n}$

und $\frac{p}{2} = 180$

Subst. $x = 180 - \frac{360}{n}$

§. 187. Anmerk. Es kann dieß auch aus andern Gründen dargethan werden. Denn oberhalb ist gezeigt worden §. 77. daß die Winkel eines jeden Polygons, es mag regulär oder irregulär seyn, 180 (n — 2) Gerade betragen; folglich, wenn durch die Anzahl aller Seiten oder Winkel dividiert wird, so erhält man einen Polygonwinkel, also allgemein

$p = \frac{180\,(n-2)}{n}$ wo p jeden Polygonwinkel vorstellet.

$$p = \frac{180\,n - 360}{n}$$

$$p = 180 - \frac{360}{n}$$

§. 188. Lehrsatz. Die Seite eines regulären Sechseckes ist dem Radius gleich.

Satz. Fig. 100

$$ab = r$$

Beweis.

$x = \frac{360}{6} = 60$ als Zentriw.

also $o + m = 180 - 60 = 120$ §. 70.

$o = m$ §. 48.

Subst. $m + m = 120$

abgek. $2m = 120$

:2 $m = 60$

und so auch $o = 60$. Das Dreyeck a d b ist demnach gleichseitig, und daher

$ad = ab$

Aber $ad = r$

Folglich $ab = r$

§. 189. **Zusatz.** Es läßt sich also der Radius sechsmal an der Peripherie herumtragen.

§. 190. **Erkl.** Wenn aus dem Zentriwinkel auf die Seite ein Perpendikel herabgefällt wird, so heißt dieß die Höhe des Polygons.

§. 191. **Zusatz.** Wenn demnach a die Höhe des Polygons, l eine Seite, und n die Anzahl aller Seiten bezeichnet, so ist der Inhalt oder die Quadratur jedes regulären Polygons oder $q = \frac{nal}{2}$; denn jeder Zentriwinkel bildet mit seiner Schlußseite ein Dreyeck, dessen Inhalt $\frac{al}{2}$ ist, da nun so viele solcher Dreyecke im ganzen Polygone sind, als Seiten dasselbe hat, so ist richtig $q = \frac{nal}{2}$

§. 192. **Lehrsatz.** Der Quadratinhalt eines Zirkels ist vollkommen gleich dem halben Produkte aus der Peripherie in den Radius.

Satz.

Satz. Fig. 101

$q = \frac{pr}{2}$ Wo p die Peripherie und r den Radius vorstellt.

Beweis.

Jeder Zirkel läßt sich als ein reguläres Polygon von unendlich kleinen und vielen Seiten vorstellen. Es müssen also auch die Zentriwinkel unendlich klein seyn. Wenn nun aus selben ein Perpendikel auf die Seite, die ein unendlich kleiner Theil von der Peripherie ist, nämlich $\frac{p}{\infty}$ herabgefällt wird, welche Seite ohne Irrthum für eine gerade Linie angenommen werden kann, so ist der Perpendikel nichts anders als der Radius selbst; folglich ist der Inhalt eines solchen Kleindreyecks $= \frac{p}{\infty} \times \frac{r}{2} = \frac{pr}{2\infty}$. Da es nun solcher Dreyecke unendlich viel ∞ giebt, so ist

$$q = \frac{\infty \times pr}{2\infty}$$

Der Bruch durch ∞ verkl. $q = \frac{pr}{2}$

§. 193. **Lehrsatz.** Wenn statt der Polygonhöhe der Radius des Zirkels gegeben wird, in welchen das Polygon hineinbeschrieben ist, so läßt sich der Inhalt desselben mehrmal bestimmen. Es ist, wenn alles übrige, wie vorher der

Satz. Fig. 102

$$q = \frac{nl}{2} \sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}}$$

Beweis.

Beweis.

Man ziehe die Höhe des Polygons, um den Werth dafür zu finden.

Weil nun $ah = hb = \frac{l}{2}$

und $ch^2 = ad^2 - ah^2$, so ist

nach der Substitution $a^2 = r^2 - \frac{l^2}{4}$

$a = \sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}}$

beyderseits mit der halben Grundlinie mult. $\frac{al}{2} = \frac{l}{2}\sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}}$

Das ist in der Figur $\Delta\, adb = \frac{l}{2}\sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}}$

Mit der Anzahl aller Dreyecke mult. $n\Delta\, adb = \frac{nl}{2}\sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}}$

Das ist $q = \frac{nl}{2}\sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}}$

§. 194. Anmerk. In der ebnen Trigonometrie, wie wir erfahren werden, kann von diesen drey gegebnen Stücken immer eins wegbleiben, und der Inhalt läßt sich dem ungeachtet genauer noch als hier berechnen.

§. 195. Anmerk. Man kann auch jedes reguläre Polygon durch die Figurenwandlung in ein Dreyeck verzeichnen, welches ihm völlig am Inhalte gleich kömmt. Die Bewerkstelligung hievon ist diese: Man ziehe Fig. 102 eine unbestimmte gerade Linie von ziemlicher Länge; setze am äußersten Endpunkt, oder auch in der Mitte die Polygonhöhe von Fig. 101 rechtwinklicht darauf; schneide auf dieser unbestimmten Linie, vom Perpendikel aus, alle Polygonseiten nach und nach ab, und ziehe allemal wieder die Hypothenuse, so ist jedes Dreyeck einem Zentriwinkeldreyeck dem Inhalte nach gleich; indem sie einerley Grundlinie und Höhe haben, und weil alle am Ende nur ein einziges Dreyeck formen, so ist nothwendig dieses Dreyeck der Inhalt des Polygons selbst. Es erhellet dann mehrmal daraus, daß, weil die Grundlinie dieses Dreyeckes $= nl$ und die Höhe $= a$ ist, der Quadratinhalt d. i. $q = \frac{anl}{2}$ seyn müsse.

Obgleich diese Verzeichnung bey einem Zirkel, der ein Polygon von unendlich kleinen und vielen Seiten ist, gar zu mühsam läßt, und weder unsere Sinne, noch unsere Werk-

zeuge

zeuge dazu fein genug sind, so findet doch der Verstand die Sache sehr wohl möglich, und man kann daher mit aller Richtigkeit sagen: Jeder Zirkel sey einem Dreyecke vollkommen gleich, dessen Grundlinie die Peripherie und die Höhe der Radius ist.

§. 196. **Lehrsatz.** **Je kleiner eine Sehne im nämlichen Zirkel ist, desto näher kömmt sie auch an Länge ihrem Bogen.**

Beweis.

Man ziehe eine Sehne im Zirkel, wo man will, z. B. Fig. 103 a c, so ist diese der kürzeste Weg zwischen ihren Endpunkten a und c, folglich muß der Bogen, als eine krume Linie, länger seyn als die Sehne. Natürlich muß nun auch der halbe Bogen a d b länger als die halbe Sehne a h seyn, wenn beede zuvor durch einen Perpendikel, das ist durch den Radius getheilt worden, wie hier durch f b. Wenn nun für diesen halben Bogen eine Sehne gezogen werden kann, die größer als die vorige halbe Sehne ist, so muß sie nothwendig ihren Bogen an Länge näher kommen, als die erste. Aber a b ist die Hypothenuse und a h eine Lothe im nämlichen Dreyecke; folglich ist sie größer, und eben darum dem Bogen näher an Länge. Wird nun auch diese wieder halbiert und mehrmals eine neue gezogen, so verhält sichs auf gleiche Weise.

§. 197. **Zusatz.** Durch fortgesetzte Halbierungen also, kann man endlich eine Sehne erhalten, die ihrem Bogen an Länge so nahe kömmt, als man nur verlangt.

§. 198. **Zusatz.** Daraus nun wird begreiflich, wie in dem nämlichen Zirkel die Anzahl

der

der Seiten des hineinbeschriebnen Polygons verdoppelt werden: das heißt, wie z. B. aus einem Viereck ein Achteck entstehen könne. Es darf nur jede Seite samt dem Bogen auf die vorige Art in gleiche Theile getheilt werden, so geben die Sehnen der halbierten Bögen, weil sie alle gleich sind, die Seiten eines Vieleckes ab, das noch so viel Seiten zählt.

§. 199. **Lehrsatz.** Wenn die Seite eines Polygons $= l$, der Radius des Zirkels $= r$, und die Seite des neuen Polygons von noch so vielen Seiten $= \lambda$ ist, so heißt der

Satz.

$$\lambda = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \tfrac{1}{4}l^2}}$$

Beweis.

Es sey Fig. 103 $df = fb = 1 \quad dm = x$

$ab = l \quad fm = 1 - x$

$am = mb = \frac{l}{2}$

$db = \lambda$

Nun ist

I $md^2 = db^2 - mb^2$ d. i.

$$x^2 = \lambda^2 - \frac{l^2}{4}$$

und $x = \sqrt{\lambda^2 - \frac{l^2}{4}}$

II $fm^2 = fb^2 - mb^2$

$$(1-x)^2 = 1 - \frac{l^2}{4}$$

$$1 - x = \sqrt{1 - \frac{l^2}{4}}$$

$$1 - \sqrt{1 - \frac{l^2}{4}} = x$$

III

$$\text{III} \quad \sqrt{\lambda^2 - \frac{l^2}{4}} = 1 - \sqrt{1 - \frac{l^2}{4}}$$

$$\lambda^2 - \frac{l^2}{4} = 1 - 2\sqrt{1 - \frac{l^2}{4}} + 1 - \frac{l^2}{4}$$

$$\lambda^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{l^2}{4}}$$

$$\lambda = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{l^2}{4}}}$$

§. 200. **Zusatz.** Will man dieß alles dahin anwenden, um zu erforschen, welches Verhältniß der Radius, oder der Diameter eines Zirkels zu seiner Peripherie habe, so darf nur das reguläre Sechseck zum Grunde gelegt werden, weil hier die Seite selbst ein Radius ist. Sucht man nun nach und nach aus selbem andere Polygone von 4, 8, 16 mal so viel Seiten u. s. f., so kömmt man zuletzt auf ein Polygon, das in kleinen Zirkeln beynahe ganz mit der Peripherie übereinfällt, und die man ohne erheblichem Irrthum für die Peripherie selbst annehmen darf. Wird die Rechnung noch weiter fortgeführt, so erhält man auch die Peripherien für größere Zirkel.

Es verwandelt sich demnach die allgemeine Formel $\lambda = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{l^2}{4}}}$ für das Zwölfeck, weil $l = r = 1$, in diese nun

$$\lambda = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{1}{4}}}$$

$$\lambda = \sqrt{2 - 2\sqrt{\frac{3}{4}}}$$

$$\lambda = \sqrt{2 - \frac{2\sqrt{3}}{2}}$$

$$\lambda = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

Will man die Seite für das Vierundzwanzigereck so ist $l = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$, und $l^2 = 2 - \sqrt{3}$.

Daß

Das nun wieder in der allgemeinen Formel substituiert giebt

$$\lambda = \sqrt{2-2\sqrt{1-\frac{2+\sqrt{3}}{4}}}$$

$$\lambda = \sqrt{2-2\sqrt{\frac{4-2+\sqrt{3}}{4}}}$$

$$\lambda = \sqrt{2-\frac{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}$$

$$\lambda = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

Wenn man wieder für l in der allgemeinen Formel $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ setzt, so überkömmt man die Seite des Achtundvierzigereckes.

Weil nun $l^2 = 2 - \sqrt{2+\sqrt{3}}$

so ist $\lambda = \sqrt{2-2\sqrt{1-\frac{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4}}}$

$$\lambda = \sqrt{2-2\sqrt{\frac{4-2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4}}}$$

$$\lambda = \sqrt{2-\frac{2\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}}$$

$$\lambda = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

So geht die Rechnung nun ohne Ende fort. Mit jeder Verdopplung wächst die Formel um eine positive Wurzel aus 2, und das erste Minuszeichen bleibt immer an seinem Orte. Wird so eine Seite wirklich nach Anweisung der Formel berechnet, zum Beysp. für das Achtundvierzigereck, so erhält man 0,13089 . . . ., Weil aber in der Peripherie 48 solche Seiten herum liegen, so ist selbe = 0,13089×48 = 6,28272. Folglich ist in kleinen Zirkeln das Verhältniß des Radius zur Peripherie wie 1 : 6,282 u. s. f., und weil dieß das halbe Verhältniß zum Diame-

Diameter, einer noch so großen Linie, ist, so muß nothwendig das Verhältniß des Diameters zur Peripherie wie $1 : \frac{6282}{2} = 1 : 3141$ seyn.

§. 201. Anmerk. Man sieht von selbst, daß dieses Verhältniß immer näher und näher gefunden werden könne, je größer man die Verdopplung annimmt, und jemehr man bey Ausziehung der Wurzeln Decimalen herausbringt. Uns genügt hier bloß den Weg in der Elementargeometrie gezeigt zu haben, worauf Ludolph von Köln diese Verhältniß in 30 Decimalen gefunden. In der höhern Mathematik wollen wir auch andere Wege, die von diesem ganz verschieden sind, versuchen, und wir werden zur nämlichen Wahrheit gelangen.

§. 202. Willkührl Satz. Wir wollen in der Folge das gefundene Verhältniß des Diameters zur Peripherie 1 : 3,14, oder bey größern Zirkeln 1 : 3,1415926 u. s. f. durch $1 : \pi$ ausdrücken. Wo demnach π in einer Formel oder Beweis vorkömmt, bedeutet es allemal die Zahl 3, 14 mit so viel Decimalen, als man will; außer es wird etwas anders dabey erinnert.

§. 203. Lehrsatz. **Die Peripherie eines jeden Zirkels dessen Diameter mehr oder weniger als 1 beträgt, ist gleich dem doppelten Produkte, aus dem Radius in die Zahl 3, 14 : oder dem Produkt aus dem Diameter in die obige Zahl.**

Satz

$$p = 2 r \pi = d \pi$$

Beweis.

Es ist früher oben §. 152. erwiesen worden, daß in ähnlichen Figuren gleichnamige Linien im Verhältniße stehen: da nun alle Zirkel einander ähnlich sind,

sind, und Radius, Diameter und Peripherie in verschiedenen Zirkeln die nämlichen Namen führen, so ist in zweenen Zirkeln, wovon einer die Einheit zum Diameter hat.

$$1 : \pi = 2r : p$$

also $p = 2r\pi$

und weil $2r = d$

auch $p = d\pi$

§. 204. Anmerk. Diese Art ist kürzer, aus einem gegebnen Radius oder Diameter seine Peripherie zu suchen, als die gewöhnlichen durch die Proportion oder Regel Detri. Denn man darf nichts weiter als die Zahl 3, 14 mit dem gegebnen Diameter multiplicieren. Z. B. wenn er 12 Schuhe ist, so entspricht ihm eine Peripherie von 3, 14 × 12 = 37,68 Schuhen. Die Rechnung ist also zu Ende, ohne erst eine von den Proportionen 100 : 314 = 12 : x, oder 113 : 355 = 12 : x oder 7 : 22 = 12 : x anschreiben gemüßt zu haben. Zudem ist das zweyte Verhältniß 113 : 355, welches Adrian Metius gefunden, etwas unrichtig, und noch unrichtiger des Archimedes seines 7 : 22. Denn löset man sie in Decimalen auf, so weichet jenes in der 7ten, und dieses schon in der 3ten Decimalstelle von dem Ludolphischen Verhältniße, als dem wahren Probierstein aller übrigen, ab.

§. 205. Lehrsatz. Die Fläche eines Zirkels ist gleich dem Produkte aus dem Quadrat des Radius in die Zahl 3, 14

Satz.

$$q = r^2\pi$$

Beweis.

Es ist dargethan worden, daß im Zirkel

$$q = \frac{rp}{2}$$

aber $p = 2r\pi$

substit. $q = \frac{r \times 2r\pi}{2}$

abgek. $q = \frac{2r^2\pi}{2} = r^2\pi$

§. 206. Zusatz. Will man eine Formel für den Quadratinhalt des Zirkels haben, wo statt des Radius, der Diameter in die Rechnung gezogen wäre, so darf man nur bedenken, daß $r = \frac{d}{2}$ folgl. $r^2 = \frac{d^2}{4}$ sey. Dieß nun substituiert giebt $q = \frac{d^2 \pi}{4}$. Oder soll gar statt dem Radius oder dem Diameter die Peripherie in der Formel erscheinen, so ist

weil $p = 2 r \pi$

Dann $\frac{p}{2\pi} = r$

und endlich $\frac{p^2}{4\pi^2} = r^2$,

nach der Substitution $q = \frac{p^2 \pi}{4 \pi^2}$

abgek. $q = \frac{p^2}{4 \pi}$

§. 207. Zusatz. Jeder sieht von selbst, wie auch umgekehrt aus dem Inhalte des Zirkels der Diameter oder der Radius gefunden werden könne. Man nehme nur die Gleichung her $q = \frac{d^2 \pi}{4}$, und suche d besonders. Es ist erstens

$$4 q = d^2 \pi$$

$: \pi$ $\frac{4 q}{\pi} = d^2$ und endlich

$\sqrt{}$ $2 \sqrt{\frac{q}{\pi}} = d$

Eben so läßt sich auch aus dem Inhalte des Zirkels seine Peripherie finden. Denn $q = \frac{p^2}{4 \pi}$

$$4 q \pi = p^2$$

folglich $2 \sqrt{q \pi} = p$

§. 208.

§. 208. **Lehrsatz.** Die Flächeninhalte zweener Zirkel verhalten sich wie die Quadrate ihrer Radiusse oder ihrer Diameter, oder auch ihrer Peripherien. Der Beweis wäre eben nicht nöthig; denn es ist schon oben erhärtet worden, daß sich die Flächeninhalte ähnlicher Figuren verhalten, wie die Quadrate ähnlich liegender, oder gleichnamiger Linien, folglich gilt dieß auch von Zirkeln: allein, weil er sich kurz auch anders vortragen läßt, so wollen wir ihn hieher setzen.

Satz.

$q : Q = r^2 : R^2$

oder $= d^2 : D^2$

oder $= p^2 : P^2$

Beweis.

I $\left.\begin{matrix} q = r^2 \pi \\ Q = R^2 \pi \end{matrix}\right\}$ also $q : Q = r^2 \pi : R^2 \pi$

$q : Q = r^2 : R^2$ $\quad \pi:$

II $q = \frac{d^2 \pi}{4}$

$Q = \frac{D^2 \pi}{4}$

$q : Q = \frac{d^2 \pi}{4} : \frac{D^2 \pi}{4}$ $\quad 4\times$

$q : Q = d^2 \pi : D^2 \pi$ $\quad \pi:$

$q : Q = d^2 : D^2$

III $q = \frac{p^2}{4\pi}$ §. 206.

$Q = \frac{P^2}{4\pi}$

$q : Q = \frac{p^2}{4\pi} : \frac{P^2}{4\pi}$ $\quad 4\pi\times$

$q : Q = p^2 : P^2$

§. 209.

§. 209. **Lehrsatz.** Der Inhalt eines Sektors ist das Produkt aus der Gradenanzahl des Bogens in das Quadrat des Radius und der Zahl 3, 14, alles dividiert durch 360. Es heiße die Anzahl der Graden = a, so gilt der

Satz.

$$q = \frac{a r^2 \pi}{360}$$

Beweis.

Es sey das Längenmaas des Bogens = x

$$a : 360 = x : p$$

aber

$$p = 2 r \pi$$

$$a : 360 = x : 2 r \pi$$

$$2 a r \pi = 360 x$$

$$\frac{2 a r \pi}{360} = x$$

Nun läßt sich ein Sektor gerade so dem Verstande nach in ein Dreyeck verwandeln, wie der Zirkel selbst. Die Höhe des Dreyecks wird wieder der Radius seyn, und die Grundlinie der Bogen im Längenmaase, also ist überhaupt

$$q = \frac{x \times r}{2} \quad \text{für x substit.}$$

$$q = \frac{2 a r \pi}{360} \times \frac{r}{2}$$

$$q = \frac{2 a r^2 \pi}{2 \times 360} = \frac{a r^2 \pi}{360}$$

§. 210. **Anmerk.** Segmente können zwar ebenfalls geometrisch berechnet werden; denn man darf nur den ganzen Sektor finden, der dem Bogen entspricht, und dann das Dreyeck, welches von den Radiussen und der Sehne bestimmt wird, abziehen. Allein in der Trigonometrie läßt sich das weit füglicher

licher leisten. Dort ist es genug, wenn ich die Länge der Sehne und die Anzahl der Grade des Bogens weiß: hier muß mir auch nebenher noch der Radius bekannt seyn. Ueberhaupt fodert der Geometer alle drey Stücke als gegeben, da die Trigonometrie was immer für zwey nur von selben verlanget; denn das dritte bestimmt sich selbst; es kann also gewiß nicht so richtig gegeben als berechnet werden.

§. 211. **Erkl.** **Wenn die Flächen verschiedner Zirkel in einander liegen, wenn die Lage auch eben nicht konzentrisch ist, so wird ihre Flächendifferenz ein Ring genennt.**

§. 212. **Lehrsatz.** **Der Inhalt eines solchen Ringes ist das Produkt aus der Differenz der quadrierten Radiusse beyder Zirkel in die Zahl 3, 14.**

Satz. Fig. 104

$$\text{annul.} = (R^2 - r^2)\,\pi$$

Beweis.

$$\begin{array}{rrcl} & Q & = & R^2\,\pi \\ & q & = & r^2\,\pi \\ \hline & Q - q & = & R^2\,\pi - r^2\,\pi \\ \text{aber} & Q - q & = & \text{annul.} \\ \hline \text{also} & \text{annul.} & = & R^2\,\pi - r^2\,\pi \end{array}$$

anders ausgedrückt. $\text{annul.} = (R^2 - r^2)\,\pi$

§. 213. **Lehrsatz.** **Wenn man sowohl auf die Diagonal eines Quadrats, als auf eine ihrer Seiten, Zirkel beschreibt, so läßt sich ein solches mondenförmiges Stück, das bey der Durchschneidung gebildet worden, vollkommen quadrieren: Es ist nämlich dem vierten Theil des Quadrats gleich.**

Satz.

Satz.

$$☾ = \frac{1}{4}\, ad^2$$

Beweis.

$ag^2 = ad^2 + dg^2$

aber $ad = dg$

folglich $ad^2 = dg^2$

substit. $ag^2 = ad^2 + ad^2$

abgek. $ag^2 = 2\, ad^2$

in der Figur $Diam. = 2\, diam.$

Aber $D^2 : Circ = d^2 : circ$ §. 208. $\times 2$

$D^2 : C = 2\, d^2 : 2\, circ$

substit. $2d^2 : C = 2\, d^2 : 2\, circ$

$2d^2 \times 2\, circ = 2\, d^2 \times Circ$

$: 2\, d^2$ $2\, circ = Circ$

$: 4$ $\frac{Circ}{4} = \frac{2\, circ}{4} = \frac{circ}{2}$

In der Figur $acdf = abdm$

aber $-\, acdm = -\, acdm$

$acdf - acdm = abdm - acdm$

In der Figur $adf = ☾$

aber $adf = \frac{1}{4}\, ad^2$

also $☾ = \frac{1}{4}\, ad^2$

§. 214. Anmerk. Man nennt dieses mondenförmige Stück von dem Erfinder seiner Quadratur, der ein verunglückter Kaufmann, aber ein um so glücklicherer Mathematiker war, Lunulam Hippocratis. So sehr dieser Satz von einem spekulativen Kopfe zeuget, so wenig ist er doch zur Quadratur des Zirkels verhilflich; weil man nie berechnen kann, der wievielte Theil so ein mondenförmiges Stück vom ganzen Zirkel sey. Indeß mag er wohl zu andern Erfindungen Anlaß geben; weswegen ihn auch viele Mathematiker mit in ihre Schriften aufnehmen, um ihn unter der spekulativen Welt fortzupflanzen.

Stereometrie.

§. 215. Erkl. Jener Theil der Elementargeometrie, welcher sich mit mathematischen Körpern beschäftigt, wird von dem Worte Στερεος, ein Solidum oder Körper, Stereometrie genennet.

§. 216. Erkl. Körper können regulär oder irregulär seyn. Regulär sind jene, die in lauter reguläre Flächen, als in Parallelograme, gleichseitige Dreyecke, und reguläre Polygone eingeschlossen sind, oder höchstens noch, wenn zwo parallellaufende Flächen gleiche Irregularität haben. Irregulär, wenn sie von irregulären Flächen begränzt sind. Jene Fläche aber, worauf man sie sich stehend vorstellt, heißt die Grundfläche eines Körpers. Die regulären Körper können ferner von ihrer Grundfläche an immer gleiche Dicke beybehalten, oder sie können sich zuspitzen, oder sich in eine Schneide enden, oder endlich in mehrere Spitzen und Schneiden auslaufen. Zur ersten Gattung gehören Prismen und Walzen; zur zweyten Pyramiden und Kegel; zur dritten keilartige Körper, die aber, wenn man sie gehörig wendet, allemal wieder Prismen vorstellen; zur vierten Tetraedren, Oktaedren, Ikosaedren und Dodekaedren, ferner abgestutzte Kegel und Pyramiden, und in einem gewissen Sinne auch die Kugel.

Ein von zwo gleichen Grundflächen, und eben so viel Parallelogramen, als jene Seiten haben, eingeschloßner Körper heißt ein Prisma Fig. 106: daher dreyeckichte Prismen, wenn die Grundfläche ein Dreyeck, oder Parallelepipeden, wenn die Grundfläche ein Parallelogram ist Fig. 107, oder

Kubus-

Kubysse, wenn alle einschließenden Flächen Quadrate sind Fig. 108; die übrigen heißen fünf- sechs- siebeneckichte Prismen u. s. f. Sind die Grundflächen Unendlichecke, so hat man Walzen, (Cylinder). Fig. 109. Ein von einer Grundfläche und eben so vielen Dreyecken, als jene Seiten hat, eingeschloßner Körper, heißt eine Pyramide Fig. 110. Hat die Grundfläche unendlich viele Seiten, das heißt, ist sie ein Zirkel, so ist der Körper ein Kegel (Conus) Fig. 111. Die übrigen Körper können alle betrachtet werden, als wenn sie aus Pyramiden zusammgesetzt wären; gerade so, wie jedes Polygon aus Dreyecken zusammgesetzt ist.

§. 217. Erkl. Ein körperlicher Winkel ist die Zusammneigung mehrerer geradlinichten Flächen in einem Punkte. Und weil zusammneigende Flächen, da wo sie sich fügen, durch Linien begränzt sind, welche beym nämlichen Punkt in ebne Winkel sich enden, so ist jeder körperliche Winkel eine Zusammensetzung von ebnen Winkeln.

§. 218. Zusatz. Ein körperlicher Winkel muß wenigst 3 Flächen haben; denn zwo Flächen, die sich gegen einander neigen, verlieren sich in keinen Punkt, sondern in eine Schneide, sobald aber eine dritte hinzukömmt, enden sich die Flächen in einen gemeinschaftlichen Punkt, wie z. B. bey den Ecken eines Zimmers.

§. 219. Erkl. Reguläre Körperpolygone sind jene, die lauter gleiche einschließende Flächen, und gleiche Körperwinkel haben. Im widrigen Falle sind sie irregulär. Neben dem Kubus, den wir schon erklärt haben, giebt es

1) das Tetraedrum Fig. 112, welches von 4 gleichseitigen gleichen Dreyecken eingeschloßen wird, folglich auch für eine gleichseitige Pyramide gelten kann. Weil nun in gleichseitigen Dreyecken jeder Winkel 60° hält, und drey solche Winkel zusammstossen, so beträgt ein körperlicher Winkel des Tetraedrums 3 × 60 = 180°.

2) Das Oktaedrum Fig. 113 Nro I, das von 8 gleichseitigen gleichen Dreyecken eingeschlossen ist. Der Winkel hält überall 4 × 60 = 240°.

3) Das Ikosaedrum Fig. 113 Nro II, ist in 20 solche gleiche Dreyecke eingeschränkt. Der Winkel faßt folglich 5 × 60 = 300°.

4) Das Dodekaedrum Fig. 114, welches 12 reguläre Fünfecke begränzen. Weil nun ein Fünfeckswinkel $= 180 - \frac{360}{5} = 180 - 72 = 108°$ hält, und drey solche ebne Winkel den Körperwinkel geben, so ist dieser 108 × 3 = 324°.

§. 220. **Zusatz.** Mehrere reguläre Körper giebt es nicht. Denn man setze Winkel von regulären Flächenfiguren zusamm, welche man will, so werden sie allemal 360° oder darüber geben. Weil aber bekannt ist, daß 360° um einen Punkt herum in die Ebne fallen, so können diese keinen Körperwinkel geben; und mehr als 360° würden einen unmöglichen Körperwinkel geben.

§. 221. **Erkl.** Die Kugel, welche entsteht, wenn sich ein Halbzirkel um den Diameter ganz herum bewegt, ist ein Polyedrum von unendlich vielen und kleinen einschließenden Vieleckchen, welche die runde Oberfläche der Kugel bestimmen.

§. 222. Zusatz. Weil sich alle reguläre Körper, wie wir oben sagten, in Pyramiden, die eine solche einschließende Fläche zur Basis, und den halben Diameter zur Höhe haben, zerfällen lassen, so ist auch die Kugel nichts anders als eine Zusammsetzung von unendlich schmalen Pyramiden, die zur Höhe den Radius haben, und deren Spitzen alle sich im Mittelpunkt befinden, folglich ihre sämmtlichen Grundflächen die Oberfläche der Kugel geben. Wenn wir nun in Staude gesetzt sind, eine Pyramide zu berechnen, so lassen sich die Tetraedren, Oktoedern u. s. f., ja selbst die Kugel, leicht nach kubischem Maase bestimmen.

§. 223. Lehrsatz. Parallelepipeden von einerley Höhe und Grundfläche (Basis) sind einander gleich.

Beweis.

Man lege die Körper auf jene Parallelogrammseiten, die einerley Höhe und Grundfläche haben, so werden diese gleich seyn. Stelle man sich ferner vor, jeder dieser Körper bestehe aus lauter solchen aufeinander liegenden Flächen oder Lamellen, wie z. B. ein Buch aus aufeinander liegenden Blättern, so werden alle Flächen des Körpers A Fig. 115 den Flächen des Körpers B gleich seyn. Weil nun ferner diese Körper gleiche Höhe haben, so müssen auch bey jedem gleich viel solcher Lamellen seyn; woraus nothwendig folgt, daß selbst die Körper gleich sind.

§. 224. Zusatz. Jedes Parallelepipedum läßt sich durch einen Diagonalschnitt der Grundfläche in zwey gleiche Prismen theilen; denn man kann sich vorstellen, daß das Parallelepipedum aus lauter auf-

ein-

einanderliegenden Parallelogramen bestünde: weil nun diese alle in gleiche Theile getheilt werden, so wird es eben darum auch der Körper, dessen Bestandtheile jene waren. Eben so lassen sich auch vieleckichte Prismen in so viel dreyeckichte, durch solche Diagonalschnitte theilen, die einander nicht durchkreuzen, als die Grundfläche Seiten hat weniger zwey.

§. 225. **Lehrsatz.** Jedes dreyeckichte Prisma läßt sich durch zween schiefe Schnitte von einem Ecke zu zwey andern in drey gleiche Pyramiden zertheilen. Fig. 116. Der Beweis kann am deutlichsten bey der wirklichen Zerschneidung selbst geführt werden. Es werden nämlich bey den drey Pyramiden zwey dabey seyn, die völlig einander gleich und ähnlich sind. Man nehme nun zu der dritten Pyramide eine solche von den zweyen zu Hilfe, die ein und die nämliche diagonalartig zerschnittene Seite miteinander haben, und die sich, wenn man sie beyde auf diese Seitenflächen legt, in eine gemeinschaftliche Spitze enden, so werden auch diese zwey Pyramiden wegen gleicher Höhe und Grundfläche gleichen Inhalt in sich fassen. Sind nun zwey Dinge einem dritten gleich, so sind es alle drey unter sich selbst; also müssen nothwendig die drey Pyramiden einander gleich seyn. Einen schärfern, algebraischen Beweis wollen wir von diesem wichtigen Lehrsatze bey der Differentialrechnung vortragen.

§. 226. **Zusatz.** Eine dreyeckichte Pyramide ist demnach der dritte Theil eines Prisma, das mit ihr gleiche Höhe und Grundfläche hat. Ueberhaupt genommen, ist jede Pyramide der dritte Theil jedes Prisma, es mag so viel Ecke in der Grundfläche haben als es wolle, wenn nur der Inhalt dieser

Grund-

Grundfläche sammt der Höhe überall die nämliche ist; weil sich gleiche Flächen doch endlich in gleiche Dreyecke verwandeln lassen.

§. 227. Zusatz. Weil Kegel als Pyramiden, und Walzen als Prismen von unendlicheckichten Grundflächen angesehen werden können, so ist auch der Kegel der dritte Theil der Walze von einerley Grundfläche und Höhe.

§. 228. Erkl. Ein Körper wird ausgemessen, wenn ein anderer zur Einheit, oder zum Maaße angenommener Körper so oft in dessen Raume herum gelegt wird, als es angeht.

§. 229. Zusatz. Wie bey Flächen das schicklichste Maas ein Quadrat war, so ist es hier der Kubus; das ist, ein Körper, der von sechs Quadratflächen umschlossen ist.

§. 230. Lehrsatz. Der Inhalt eines jeden Prisma ist das Produkt aus der Grundfläche in die Höhe.

Beweis.

Auf der Grundfläche können gerade so viel Kubikmaaße z. B. Schuhe stehen, als Quadratfüsse dieselbe in sich faßt: folglich ist die Anzahl der Kubikfüsse einerley mit den Quadratschuhen der Grundfläche. Ferner, so viel Längenschuhe das Prisma hoch ist, so oft ist auch diese Schichte der Kubikschuhe in dem ganzen Prisma enthalten, das heißt aber nichts anders, als die Grundfläche mit der Höhe multiplicieren. Was hier zu erweisen war.

§. 231.

§ 231. Zusatz. Weil jedes schiefstehende Prisma einem senkrechten Prisma gleicht, das mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat, so wird auch desselben Kubatur gefunden, wenn die Grundfläche mit der Höhe, das ist mit dem Perpendikel multipliciert wird.

§. 232. Zusatz. Wir dörfen nimmer erinnern, daß Zylinder auch mit unter die Rubricke von Prismen gehören, folglich ebenfalls so berechnet werden müssen.

§. 233. Zusatz. Der Inhalt der Pyramiden, folglich auch der Kegel, wird gleichfalls so gefunden, wenn man Grundfläche mit der Höhe multipliciert, aber am Ende durch 3 das Produkt dividiert; weil sie der dritte Theil von jenen Körpern sind, die mit ihnen Höhe und Grundfläche gemein haben. §. 227.

§. 234. Anmerk. Eine hieher gehörige Aufgabe fürs Praktische. Der kleinste von den zu Rom befindlichen 5 ägyptischen Obelisken, welcher auf dem Platze vor der Minerva steht, hält (nach Ostertags Abhandlung über Roms gnomonischen Prachtkegel) $16\frac{1}{2}$ Fuß Höhe, und unten 26 Zoll $= 2\frac{1}{6}$ Fuß (vermuthlich Parisermaas) ins Gevierte. Wie viele Kubikschuh beträgt seine Solidität?

Auflösung. Weil die Basis dieser Pyramide ins Gevierte geht, und eine Seite derselben $2\frac{1}{6}$ Schuh mißt, so hält sie selbst $(2\frac{1}{6})^2 = (\frac{13}{6})^2 = \frac{169}{36}$ Quadratschuh; dieß nun mit dem dritten Theil der Höhe multipliciert giebt $\frac{169}{36} \times \frac{16\frac{1}{2}}{3}$

$$= \frac{169}{36} \times \frac{33}{6} = \frac{169}{36} \times \frac{11}{2} = \frac{1859}{72} = 25\frac{59}{72}$$

oder 25',819'' Kubikinhalt.

§. 235. Zusatz. Bey keilartigen Körpern darf das Produkt aus der Grundfläche in die Höhe bloß halbiert werden; weil ein Parallelepipedum durch einen Diagonalschnitt sich in zween solche Körper zerfällen

fällen läßt, welche nachher bey der nämlichen beybehaltnen Grundfläche und Höhe, in Rücksicht der Neigung zur gemeldten Grundfläche, verschieden modificiert werden können.

§. 236. Lehrsatz. Der körperliche Inhalt eines parallel mit der Grundfläche abgestutzten Kegels ist gleich dem Produkt aus der Differenz der kubierten Radiusse in die Höhe und in die Zahl 3, 14, dieß alles durch die dreyfache Differenz der Radiusse dividiert; das ist wenn der körperliche Inhalt (Soliditas) = S, die Höhe = a, die beyden Radiusse = R und r sind, so heißt der

Satz

$$S = \frac{(R^3 - r^3)\, a\, \pi}{3\,(R - r)}$$

Beweis.

Man ergänze den Kegel wirklich, ziehe mit der Achse desselben eine Parallellinie vom Endpunkte des kleinen Diameters bis auf den großen, so ist, wenn Fig. 117 nachher die Verlängerung der Höhe b f = x heißt, und, weil h k = c f, für gh = R − r gesetzt wird.

$$gh : gk = ch : bk \quad \text{§. 143.}$$

subſtit. $(R - r) : R = a : (a + x)$

$$aR + Rx - ar - rx = aR$$

$$Rx - rx = ar$$

$$x = \frac{ar}{R - r}$$ die Höhe des mangelnden Kegelstücks

Folg-

Folglich $a + \frac{ar}{R-r} = \frac{Ra - ra + ra}{R-r}$

$= \frac{Ra}{R-r}$ die völlige Höhe des ergänzten Kegels.

Wenn nun diese beyden Höhen mit ihren Grundflächen, welche $r^2 \pi$ und $R^2 \pi$ sind, multipliciert, und durch drey dividiert werden, so erhält man beyde Körper; welche, von einander abgezogen, den abgestutzten Kegel geben. Es heiße der ergänzte Kegel $= C$ und das mangelnde Kegelstück $= c$ so wird die Rechnung diese seyn.

$$C = \frac{R^2 \pi \times \frac{Ra}{R-r}}{3} = \frac{R^3 a \pi}{3(R-r)}$$

$$c = \frac{r^2 \pi \times \frac{ar}{R-r}}{3} = \frac{r^3 a \pi}{3(R-r)}$$

$$C - c = \frac{R^3 a \pi - r^3 a \pi}{3(R-r)} = \frac{(R^3 - r^3) a \pi}{3(R-r)}$$

oder $S = \frac{(R^3 - r^3) a \pi}{3(R-r)}$

§. 237. Zusatz. Auf eine ähnliche Art läßt sich auch eine Formel für abgestutzte Pyramiden finden.

§. 238. **Lehrsatz. Die Kugel ist zween Drittheilen einer Walze gleich, die mit ihr einerley Grundfläche und Höhe hat. Man versteht aber unter der Grundfläche die größte Zirkularfläche, die nämlich durch den Mittelpunkt der Kugel geht; und unter der Höhe, den Diameter derselben. Wenn wir**

die

die Kugel (Sphaera) durch S, und den Zylinder oder Walze durch C ausdrücken, so heißt der

Satz

$$S = \frac{2}{3} C$$

Beweis.

Man beschreibe ein Quadrat Fig. 118, ziehe eine Diagonal, und aus einem Endpunkte derselben mit der Seite des Quadrats einen Quadranten, so wird eines der rechtwinklichten Dreyecke, der Quadrant selbst, und das Quadrat eine gemeinschaftliche Linie haben. Stellt man sich nun ferner vor, es bewegen sich alle drey Figuren zugleich um diese Linie, als um ihre gemeinschafliche Achse; so wird das rechtwinklichte Dreyeck einen Kegel, der Quadrant eine halbe Kugel, und das Quadrat einen Zylinder beschreiben, der die Höhe von der halben Kugel hat, folglich auch für einen halben Zylinder zu halten ist: wir wollen ihn $c = \frac{1}{2} C$, so wie den Kegel k nennen. Man ziehe endlich durch die Figur eine Parallellinie mit der Basis des Kegels wo man will, und einen Radius an jenen Punkt hin, wo diese Parallellinie die Peripherie durchschnitten hat; so giebt es folgende Rechnung ab.

$df^2 = gf^2 - dg^2$. §. 118. Für gf^2 und dg^2 andere Werthe gesucht.

I $gf = gh$ als Radius
$dc = gh$ wegen Zwischenparallelen

also $gf = dc$ und
$gf^2 = dc^2$

$$\text{II}\quad dg : dl = ga : ab$$
$$\text{aber}\quad ga = ab$$
$$\text{subst.}\quad dg : dl = ab : ab$$
$$dg \times ab = dl \times ab$$
$$:ab\quad dg = dl$$
$$\text{und}\quad dg^2 = dl^2$$

In der ersten Hauptgleichung substituiert, so wird $df^2 = dc^2 - dl^2$

Es sind aber df, dc und dl nichts anders als Radiusse der Durchschnittslamellen von der Kugel, von dem Zylinder und dem Kegel. Es verhalten sich aber die Quadrate der Radiusse, wie die Zirkel; folglich können statt obigen Ausdrücken die Durchschnittslamellen selbst substituiert werden, also

Kugeldurchschnittslamell = Walzendurchschnittslamell — Kegeldurchschnittslamell.

Weil aber diese Durchschnitte überall in der Figur gemacht werden können, und die Gleichung allemal wahr bleibt, so lassen sich endlich alle mögliche Gleichungen addieren, und geben selbst die Summe: $\frac{\text{Kugl}}{2} = \frac{\text{Walze}}{2} - \text{Kegl}$, oder nach unser angenommenen Benennung

$$\frac{S}{2} = c - k$$
$$\text{aber}\quad k = \tfrac{1}{3} c$$
$$\text{Subst.}\quad \frac{S}{2} = c - \tfrac{1}{3} c$$
$$\text{abgek.}\quad \frac{S}{2} = \tfrac{2}{3} c$$
$$\text{Nun ist aber}\quad c = \tfrac{1}{2} C \quad \text{nach der Voraussf.}$$
$$\text{substit.}\quad \frac{S}{2} = \tfrac{2}{3} \times \tfrac{1}{2} C$$
$$\frac{S}{2} = \tfrac{2}{6} C = \tfrac{1}{3} C$$
$$\times 2\quad S = \tfrac{2}{3} C$$

§. 239.

§ 239. Zusatz. Da der Kegel der dritte Theil einer Walze von gleicher Höhe und Grundfläche ist, und die Kugel zween Drittheile von dieser Walze giebt, so verhalten sich Kegeln, Kugeln und Walzen von gleicher Höhe und Grundfläche, wie 1, 2, 3.

§. 240. Lehrsatz. Der körperliche Inhalt einer Kugel ist gleich dem sechsten Theil des Produkts aus dem Kubus des Durchmessers in die Zahl 3, 14.

Satz.

$$S = \frac{d^3 \pi}{6}$$

Beweis.

Man setze einen Zylinder und eine Kugel von gleicher Grundfläche und Höhe, so ist, weil die Grundfläche $\frac{d^2 \pi}{4}$ und die Höhe = d gesetzt wird.

$$C = \frac{d^2 \pi}{4} \times d$$

oder $C = \frac{d^3 \pi}{4}$

$\times \frac{2}{3}$ $\frac{2}{3} C = \frac{2 d^3 \pi}{12} = \frac{d^3 \pi}{6}$

aber $\frac{2}{3} C = S$

Also $S = \frac{d^3 \pi}{6}$

§. 241. Zusatz. Wollte man lieber den Radius als den Diameter in dieser Formel wünschen, so darf nur ein Aequivalent in Radiussen statt d^3 substituiert werden. Es ist aber $d = 2r$.

$d^3 = 8 r^3$ folgl. $S = \frac{8 r^3 \pi}{6}$

$$S = \frac{4 r^3 \pi}{3}$$

§. 242. Zusatz. Eben so leicht ist es, statt dem Radius, oder dem Diameter, die Peripherie in die Rechnung zu bringen. Wir wissen daß $p = d\pi$, also $\frac{p}{\pi} = d$ und $\frac{p^3}{\pi^3} = d^3$. Dieß nun substituiert giebt

$$S = \frac{p^3 \pi}{6 \pi^3} = \frac{p^3}{6 \pi^2}$$

§. 243. Zusatz. Diese Formeln dienen nun, aus dem gegebnen Inhalt einer Kugel, den Radius oder den Diameter, oder auch die Peripherie derselben unmittelbar zu finden. Denn weil im ersten Fall

$$S = \frac{4 r^3 \pi}{3}$$

so ist $3 S = 4 r^3 \pi$

dann $\frac{3 S}{4 \pi} = r^3$

und $\sqrt[3]{\frac{3 S}{4 \pi}} = r$

Weil im zweyten Falle diese Gleichung nur doppelt darf genommen werden,

so ist $2 \sqrt[3]{\frac{3 S}{4 \pi}} = 2 r = d$

Und endlich im dritten Falle

$$S = \frac{p^3}{6 \pi^2}$$

$$6 \pi^2 S = p^3$$

$$\sqrt[3]{6 \pi^2 S} = p$$

§. 244. **Lehrsatz.** Die kubischen Inhalte zwoer Kugeln verhalten sich wie die Kubusse der Radiusse, oder der Diameter oder auch der Peripherien.

Sätze.

$$1)\ s : S = r^3 : R^3$$
$$2)\ \quad = d^3 : D^3$$
$$3)\ \quad = p^3 : P^3$$

Beweis.

Es ist zwar analogisch richtig, daß zween ähnliche Körper sich verhalten wie die Kubusse ähnlich liegender oder gleichnamiger Linien in selben, welches sich auch leicht erweisen läßt; folglich wäre es von Kugeln ausgemacht, weil sie alle einander ähnlich sind: indeß ist hier im besonderen Falle von Kugeln die Sache bald dargethan.

I
$$s = \frac{4 r^3 \pi}{3}$$
$$S = \frac{4 R^3 \pi}{3}$$
$$s : S = \frac{4 r^3 \pi}{3} : \frac{4 R^3 \pi}{3} \qquad \times 3$$
$$= 4 r^3 \pi : 4 R^3 \pi \qquad : 4\pi$$
$$s : S = r^3 : R^3$$

II
$$s = \frac{d^3 \pi}{6}$$
$$S = \frac{D^3 \pi}{6}$$
$$s : S = \frac{d^3 \pi}{6} : \frac{D^3 \pi}{6} \qquad \times 6$$
$$= d^3 \pi : D^3 \pi \qquad : \pi$$
$$s : S = d^3 : D^3$$

$$\text{III} \qquad f = \frac{p^3}{6\pi^2}$$

$$S = \frac{p^3}{6\pi^2}$$

$$f : S = \frac{p^3}{6\pi^2} : \frac{p^3}{6\pi^2} \qquad \times 6\pi^2$$

$$f : S = p^3 : p^3$$

§. 245. **Anmerk.** Kugelausschnitte lassen sich weit leichter und richtiger in der sphärischen Trigonometrie als hier berechnen: wir wollen sie also bis dorthin versparen.

§. 246. **Erkl.** Unter der Oberfläche eines Körpers versteht man die ganze Begränzung desselben von allen Seiten.

§. 247. **Lehrsatz.** Die Oberfläche eines dreyeckichten rechtwinklichten Prisma, dessen Seitenflächen nämlich alle rechtwinklicht auf der Grundfläche stehen, ist, wenn Fig. 119 a, b und c die Seiten der Grundfläche vorstellen, und p die Höhe des Prisma bedeutet $= (a+b+c)\,p + \frac{1}{2}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$

Beweis.

Die Seitenflächen als Rechtecke geben

$$ap + bp + cp = (a+b+c)\,p$$

Da ferner die Grundflächen zwey gleiche Dreyecke sind von den nämlichen Seiten, so machen sie

$$2 \times \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$$

Das ist, weil $2 \times \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$$

Folg.

Folglich giebt die Summe der Seiten und Grundflächen

$$S = (a+b+c)\,p + \tfrac{1}{2}\sqrt{(a+b+c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(-a+b+c)}$$

§. 248. Zusatz. Wenn das Prisma schief ist, so geben zwar die Grundflächen ebenfalls das nämliche Resultat; aber die Seitenflächen müssen nach den Gesetzen der schiefen Parallelogramen berechnet, das heißt auf die Seitenlinien, deren eine wir, weil sie gleich sind, p nennen wollen, Perpendikel gefällt werden, wenn nun Fig. 20 diese α, β, γ heißen, so ist wiederum

$$\text{Superf.} = (+\alpha+\beta+\gamma)\,p + \tfrac{1}{2}\sqrt{(a+b+c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(-a+b+c)}$$

§. 249. Zusatz. Steht das Prisma auf einem gleichseitigen Dreyecke, so erhält man zur Oberfläche

$$S = 3\,l\,p + 2 \times \tfrac{1}{4}\,l^2\sqrt{3}$$

abgek. $S = 3\,l\,p + \tfrac{1}{2}\,l^2\sqrt{3}$

§. 250. Zusatz. Ist das Prisma ein Kubus, und nennt man eine Seitenlinie a, so erhält man für Sup. $= 6\,a^2$.

§. 251. Zusatz. Ist es ein rechtwinklichtes Parallelepipedum, und heißen die zwo verschiedenen Seiten der Grundfläche a und b, so wird die Sup. $= 2(a+b)\,p + 2\,a\,b$ seyn. Schiefe Parallelepiden können mehrmal nicht anders, als durch Perpendikel bestimmt werden.

§. 252. Zusatz. Für Prismen, deren Grundfläche reguläre Polygone sind, verwandeln sich deren Ausdruck in diesen

$$nlp + nl\sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}}$$ wie Jedermann aus §. 193 leicht begreift. Für irreguläre hingegen, wenn P den Ummesser (Perimeter) und B die Grundfläche selbst bedeutet

$$Sup. = Pp + 2B$$

§. 253. **Zusatz.** Weil Zylinder Unendlichecke, nämlich Zirkel zur Grundfläche haben, deren Perimeter die Peripherie $d\pi$ ist, so gilt hier die Formel

$$Sup. = d\pi p + \frac{2d^2\pi}{4}$$

abgek. $= d\pi p + \frac{d^2\pi}{2}$

anders ges. $= (p + \frac{d}{2})\, d\pi$

§. 254. **Anmerk.** Um sich sinnlich davon zu überzeugen, darf man nur einen kleinen hölzernen Zylinder mit Papier umwickeln, und es so zu rechte schneiden, daß es ihn ausser den beyden Grundflächen ganz bedeckt, so wird, wenn man das Papier wieder davon los macht, und gehörig ausbreitet, dasselbe ein Rechteck vorstellen, dessen Höhe, die Höhe des Zylinders, und die Grundlinie, die Peripherie vorstellt; folglich ist der erste Ausdruck der Formel $d\pi \times p$ richtig, das übrige erhellet von sich selbst.

§. 255. **Zusatz.** Schiefstehende Zylinder gehören nicht hieher, sondern in die höhere Geometrie; weil ihre Grundflächen keine Zirkel mehr, sondern Ellipsen sind.

§. 156. **Lehrsatz.** Die Oberfläche einer dreyeckichten geradestehenden Pyramide ist, wenn Fig. 121 alles wie vorher, $= \frac{1}{2}p\,(a+b+c) + \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(-a+b+c)}$

Beweis.

Die Seitendreyecke lassen sich alle in eines verzeichnen, wo der Perpendikel an einer der Seiten

herun-

herunter, die Höhe, und der Ummeßer die Basis giebt; also sind diese $= \frac{p}{2} (a+b+c)$. Die Grundfläche ist ohnehin $= \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)} (a+$ u. s. f.

also $Sup. = \frac{1}{2} p (a+b+c) + \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$

§. 257. Zusatz. Schiefstehende Pyramiden haben drey verschiedene Perpendikel, das übrige ist das nämliche.

§. 258. Zusatz. Ist die Grundfläche bey geradstehenden Pyramiden ein gleichseitiges Dreyeck, so bekömmt man mehrmal, wenn die Seite l heißt $\frac{3lp}{2} + \frac{1}{4} l^2 \sqrt{3}$

§. 259. Zusatz. Steht die Pyramide auf einem regulären Polygone, so ergiebt sich die Gleichung

$$S = \frac{nlp}{2} + \frac{nl}{2} \sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}}$$

§. 260. Zusatz. Steht sie aber auf einem irregulären Polygon, und heißt die Grundfläche wieder B, so wie der Ummesser P, so ist

$$Sup. = \frac{Pp}{2} + B$$

§. 261. Zusatz. Die Oberfläche des Kegels, wo der Ummesser $= d\pi$ und die Grundfläche $\frac{d^2 \pi}{4}$, ist demnach $= \frac{d\pi p}{2} + \frac{d^2 \pi}{4} = (2p + d) \frac{d\pi}{4}$

§. 262. Zusatz. Man kann bey Kegeln auch sehr bequem aus ihrer wahren Höhe die schiefe Höhe finden; denn es ist Fig. 122

$$ad^2 = ac^2 + dc^2$$

substit. $$p^2 = a^2 + \frac{d^2}{4}$$

$$p = \sqrt{a^2 + \frac{d^2}{4}}$$

Wenn nun in der obigen Formel statt p substituiert wird, so giebt dieß

$$\text{Sup.} = (2\sqrt{a^2 + \frac{d^2}{4}} + d)\, \frac{d\pi}{4}$$

§. 263. **Zusatz.** Aus den Begriffen von Polyädern kann es auch gar nicht schwer seyn, ihre Oberflächen zu bestimmen; weil sie von lauter regulären Figuren eingeschlossen sind. Wer sieht z. B. nicht, daß beym Tetraedrum, wenn die Seite eines Dreyecks $= 1$, folglich der Inhalt jedes solchen Dreyecks $\frac{1}{4} 1^2 \sqrt{3}$ ist, die Oberfläche $= 4 \times \frac{1}{4} 1^2 \sqrt{3} = 1^2 \sqrt{3}$ seyn müsse, und so von andern zu reden.

§. 264. **Lehrsatz.** Die Oberfläche jeder Kugel ist gleich vier größten Zirkelflächen, das ist solcher, die durch den Mittelpunkt der Kugel gehen; oder was eins ist, dem Produkt aus dem Quadrat des Diameters in die Zahl 3,14.

Satz.

$$4C = \text{Sup.} = D^2 \pi$$

Beweis.

Man bilde sich neben der Kugel einen Zylinder ein, der zur Grundfläche einen größten Zirkel der Kugel, und zur Höhe den Diameter davon hat, so ist, wenn Z den Zylinder und K die Kugel vorstellt,

$$\begin{array}{lrcl} & CD & = & Z \\ \times \frac{2}{3} & \frac{2}{3}CD & = & \frac{2}{3}Z \\ \text{aber} & K & = & \frac{2}{3}Z \\ \hline & \frac{2}{3}CD & = & K \end{array}$$

Weil

Weil sich ferner die Kugel als ein Aggregat von unendlich vielen und dünnen Pyramiden, die zur Höhe den halben Diameter haben, betrachten läßt, so können diese alle in eine einzige Pyramide verwandelt werden, deren Grundfläche die Oberfläche der Kugel seyn wird. Folglich ist ihr Inhalt

$$\frac{\text{Sup.} \times \frac{1}{2} D}{3} = \frac{1}{6} \text{Sup.} \times D$$

Also $\frac{1}{6}$ Sup. $\times$ D $=$ K; und oben hieß es

$$\frac{2}{3} C \times D = K$$

$$\frac{2}{3} C D = \frac{1}{6} \text{Sup.} D \qquad D:$$

$$\frac{2}{3} C = \frac{1}{6} \text{Sup.} \qquad 6\times$$

$\frac{12}{3} C = 4 C = \text{Sup.}$ Das erste, was zu erweisen war. Weil endlich

$$C = \frac{D^2 \pi}{4}$$

und $4 C = D^2 \pi$ ist, so kann mehrmal substituiert werden, und dann ist auch

$$\text{Sup.} = D^2 \pi$$

§. 265. Zusatz. Man erhält demnach den Inhalt der Kugel auch durch Berechnung, wenn man sie pyramidenartig betrachtet. Die Grundfläche dieser Pyramide wäre also $d^2 \pi$ oder vier gröste Zirkel, diese nun durch den dritten Theil der Höhe multipliciert, das ist durch $\frac{d}{6}$, giebt $\frac{d^3 \pi}{6}$ die obige Formel für Kugeln.

§. 266. Anmerk. Zum Beschluß noch eine Aufgabe von solchen Kugelberechnungen. Wenn des Mondes Durchmesser nach de la Landes 1785306 Toisen (Französische Klafter zu 6 Schuhe) hält; wie viel beträgt sein körperlicher Inhalt in Kubiktoisen; vorausgesetzt, daß er eine wahre Kugel sey?

Auf-

Auflösung. Man setze in der Formel $\frac{d^3 \pi}{6}$ statt den Buchstaben die gehörigen Zahlen, und nehme π in etwas mehr Decimalen, so giebt dieß $\frac{(1785306)^3 \times 3{,}1415}{6}$

$$= \frac{5690337090999332616 \times 3{,}1415}{6}$$

$$= \frac{17876193971364403413{,}164}{6} = 2979365661895733902{,}194.$$

Kubiktoisen.

Körperwandlung.

§. 267. Erkl. Körper verwandeln, heißt ihre Oberfläche, des kubischen Inhalts unbeschadet, in eine andere reguläre Figur umändern.

§. 268. Anmerk. Diese Arbeit zu erleichtern, dörfen nur die Ausdrücke für die Kubaturen der Körper in Bereitschaft gehalten werden. Die vornehmsten sind, wie oben gezeigt worden 1) für Prismen a B, wo B die Grundfläche bedeutet, 2) für Zylinder $\frac{a d^2 \pi}{4}$, 3) für Pyramiden $\frac{a B}{3}$ 4) für Kegel $\frac{a d^2 \pi}{12}$ und 5) für Kugeln $\frac{d^3 \pi}{6}$

§. 269. Aufgabe. Ein Parallelepipedum, das zur Grundfläche ein Quadrat hat, wovon die Seite a heißt, und dessen Höhe noch so groß als diese Seite ist, in einen Kubus zu verwandeln, oder was eins ist, einen Kubus zu verdoppeln.

Anflösung. Die Seite des Kubus, ist x, folglich sein Inhalt $= x^3$. Weil nun der Inhalt eines Parallelepipedums durch das Produkt aus der Grundfläche in die Höhe bestimmt wird, so giebt dieß hier $a^2 \times 2a = 2a^3$; also die Gleichung

$$x^3 = 2a^3$$

$$x = \sqrt[3]{2a^3}$$

oder $x = a\sqrt[3]{2}$

§. 270.

§. 270. **Anmerk.** Dieß war eigentlich jenes berüchtigte Problem von Verdopplung des Kubusses, welches die Alten so lange nicht aufzulösen wußten, ungeachtet ihnen viel daran lag, und dessen Aufschluß sie endlich auf einem mühsamen Umweg fanden. Hyppokrates und Eratostenes kamen nämlich auf den Gedanken, die Seite eines noch so großen Kubusses müsse die erste von zwo mittleren geometrischen Proportionalgrößen seyn, die zwischen eine und zwo Seiten des einfachen Kubusses hineinfallen, und fanden diesen Gedanken auch wirklich gegründet. Es läßt sich dieß auch algebraisch zeigen. Die Progreßion, welche ohnehin nichts anders ist, als eine fortgesetzte stättige Proportion, wird demnach so aussehen: a, x, y, 2 a Folglich ist nach der Progreßionslehre

$$\text{I} \quad ay = x^2 \qquad \text{II} \quad 2ax = y^2$$

$$y = \frac{x^2}{a}$$

und $$y^2 = \frac{x^4}{a^2}$$

III

$$\frac{x^4}{a^2} = 2ax$$

$$\frac{x^3}{a^2} = 2a$$

$$x^3 = 2a^3$$

$$x = \sqrt[3]{2a^3}$$

oder $$x = a\sqrt[3]{2}$$

Aber wer sieht nicht, daß die obige arithmetische Art ungleich simpler und kürzer gewesen wäre, dieses Problem aufzulösen, als diese letztere, die gewiß für die Alten sehr schwierig seyn mußte, weil sie die Algebra nicht zu Hilfe rufen konnten.

§. 271. **Aufgabe.** Einen Zylinder von gegebnem Durchmesser d, und die Höhe a in eine Kugel zu verwandeln: wie groß wird der Radius oder der Diameter derselben werden.

Auf-

Auflösung. Es ist demnach in der Formel $\frac{d^3 \pi}{6}$ das $d = x$ folglich

$$\frac{a d^2 \pi}{4} = \frac{x^3 \pi}{6}$$

$$\frac{a d^2}{4} = \frac{x^3}{6}$$

$$\frac{6 a d^2}{4} = x^3$$

oder $\frac{3 a d^2}{2} = x^3$

also $\sqrt[3]{\frac{3 a d^2}{2}} = x$

§. 272. Aufgabe. Einen abgestutzten Kegel, dessen Höhe $= a$, und die Radiusse R und r sind, soll in einen Zylinder verwandelt werden, der nur p hoch seyn darf, wie groß wird dessen Durchmesser seyn?

Auflösung. Antwort $d = x$. Mithin wird der Ausdruck des Zylinders $\frac{a d^2 \pi}{4}$ in diesen umgeändert $\frac{p x^2 \pi}{4}$

Also die Gleichung

$$\frac{(R^3 - r^3) . a \pi}{3 (R - r} = \frac{p x^2 \pi}{4} \quad \text{§. 236.}$$

$$\frac{(R^3 - r^3) a}{3 (R - r)} = \frac{p x^2}{4}$$

$$\frac{4 (R^3 - r^3) a}{3 (R - r)} = p x^2$$

$$\frac{4 a (R^3 - r^3)}{3 p (R - r)} = x^2$$

$$\sqrt{\frac{4 a (R^3 - r^3)}{3 p (R - r)}} = x$$

$$2 \sqrt{\frac{a (R^3 - r^3)}{3 p (R - r)}} = x$$

§. 273.

§. 273. **Aufgabe.** Eine Kugel, deren Diameter δ ist, in ein Prisma zu verwandeln, dessen Grundfläche ein gleichseitiges Dreyeck, und die Höhe gleich m werden soll, wie groß wird eine Seite der Grundfläche ausfallen?

Auflösung. Da der Ausdruck für ein Prisma $= aB$ ist, und B in unserm Fall ein gleichseitiges Dreyeck bezeichnet, so muß $\frac{l^2}{4}\sqrt{3}$ dafür substituiert werden. Endlich weil eben l als unbekannt gesucht wird, so setze man an dessen statt x, und man erhält $\frac{x^2}{4}\sqrt{3}$ folglich

$$\frac{\delta^3 \pi}{6} = \frac{x^2}{4}\sqrt{3} \times m$$

oder

$$\frac{\delta^3 \pi}{6} = \frac{m x^2}{4}\sqrt{3}$$

$$\frac{4\delta^3 \pi}{6} = m x^2 \sqrt{3}$$

$$\frac{2\delta^3 \pi}{3} = m x^2 \sqrt{3}$$

$$\frac{2\delta^3 \pi}{3 m\sqrt{3}} = x^2$$

$$\sqrt{\frac{2\delta^3 \pi}{3 m\sqrt{3}}} = x$$

§. 274. **Anmerk.** Um die Sache begreiflicher zu machen, wollen wir ein Paar praktische Beyspiele der Verwandlung anführen.

I **Aufgabe.** Wie lange müßte ein Haarröhrchen, d. i. ein gläserner Zylinder seyn, dessen Durchmesser eine Linie beträgt, um einen Kubikzoll Wassers zu fassen?

Auflösung. Die Basis eines solchen Haarröhrchens ist nach dem Ausdrucke $\frac{d^2 \pi}{4} = \frac{1 \times 3,14}{4} = \frac{3,14}{4}$.

Weil

Weil nun die Höhe unbekannt ist, so heiße sie x, und weil ein Kubikzoll 1728 Kubiklinien hält, so ist

$$\frac{3,14\ x}{4} = 1728$$

$$3,14\ x = 6912$$

$$x = \frac{6912}{3,14} = 2201 \text{ Linien} = 183$$

Zolle 5 Linien = 15 Schuh 3 Zoll 5 Linien, die Höhe des Harröhrchens.

II Aufgabe. Ein Bötcher soll ein Faß von 24 Eimer verfertigen, welches nicht länger als 12 Schuhe werden darf, und dessen Bodenhöhe sich zur Spundhöhe wie 4 : 5 verhalten soll; welche Gestalt wird es bekommen?

Auflösung. Wenn man Crusens Kontoristen mit H. Prof. Westenrieder (Beschreibung der Stadt München) vergleicht, so hält der baierische Eimer genau 2 Pariserkubikfüsse, folglich 24 Eimer 48 Kubikschuhe. Setze man nun die Bodenhöhe = x, so wird nach der Proportion $4 : 5 = x : \frac{5x}{4}$ die Spundhöhe $\frac{5x}{4}$ seyn. Weil sich nun jedes Faß als ein doppelter abgestutzter Kegel betrachten läßt, so kann hier die allgemeine Gleichung $S = \frac{(R^3 - r^3)\ a\pi}{3\ (R - r)}$ für den besondern Fall angewendet werden.

Es ist demnach für den doppelten Kegel wo $\frac{5\ x}{2 \times 4} = R$ und $\frac{x}{2} = r$, und a endlich = 12 gilt.

$$48 = \frac{\left(\left(\frac{5x}{8}\right)^3 - \left(\frac{x}{2}\right)^3 \times 12 \times 3,14\right)}{3\ \left(\frac{5x}{8} - \frac{x}{2}\right)}$$

$$48 = \frac{\left(\frac{125\ x^3}{512} - \frac{x^3}{8}\right) \times 12 \times 3,14}{3\ \left(\frac{5x}{8} - \frac{x}{2}\right)}$$

$$48 = \frac{\left(\frac{125\ x^3 - 64\ x^3}{512}\right) \times 12 \times 3,14}{3\ \left(\frac{5\ x - 4\ x}{8}\right)}$$

48

$$48 = \frac{61x^3 \times 12 \times 3{,}14}{3 \times 512} : \frac{x}{8}$$
$$= \frac{61x^3 \times 12 \times 3{,}14}{3 \times 512} \times \frac{8}{x}$$
$$= \frac{61x^3 \times 12 \times 3{,}14 \times 8}{3x \times 512}$$
$$48 = \frac{61x^2 \times 4 \times 3{,}14 \times 8}{512} = \frac{6129{,}28\,x^2}{512}$$
$$24576 = 6129{,}28\,x^2$$
$$x^2 = \frac{24576}{6129{,}28} = 4$$

$x = 2$ Schuh beynahe Bodenhöhe. Dieß in $\frac{5x}{4}$ für x substituiert giebt $\frac{5 \times 2}{4} = \frac{10}{4} = 2\frac{1}{2}$ Schuh Spundhöhe im Parisermaase.

§. 275. **Anmerk.** Aus diesen wenigen Aufgaben läßt sich leicht auf die Verfahrungsart verschiedner anderer Probleme dieses Faches schließen.





Ebene Trigonometrie.

§. 1. Erklärung.

Sie ist die Wissenschaft aus drey gegebenen Stücken eines Dreyeckes, worunter doch wenigst eine Seite seyn muß; die übrigen drey Stücke durch Rechnung zu finden.

§. 2. Zusatz. Warum aus drey gegebnen Winkeln eines Dreyeckes nichts bestimmt werden könne, erhellet daraus, weil es unendlich viele ähnliche Dreyecke geben kann, die die nämlichen Winkel haben.

§. 3. Zusatz. Neben den geometrischen Linien hat man in der Trigonometrie noch andere nöthig, mit welchen man sich also bekannt machen muß. Die nöthigsten sind: Sinus, Kosinus, Tangente; und wenn man noch will: Kotangente, Sekante, Kosekante, Quersinus, und Koquersinus.

§. 4. Erkl. Wenn zu einem Winkel sein Bogen, den er zum Maaße hat, aus dem Scheitel beschrieben wird, oder zu einen Bogen die Radiusse gezogen werden, die ihn begränzen, so ist der Sinus dieses Bogens oder Winkels der Perpendikel, welcher von dem Ende des einen Radius auf den

andern

andern herabgefällt wird. Es versteht sich von selbst, daß in manchen Fällen ein Radius rückwärts verlängert werden muß; um diesen Perpendikel, wie bey überhängenden Dreyecken, fällen zu können. Die Tangente ist zwar aus der Geometrie bekannt, sie muß aber hier für jeden Bogen eine bestimmte Länge haben, und sich von dem Endpunkte des einen Radius bis zu dem verlängerten Radius erstrecken. Dieser verlängerte Radius nun wird die Sekante (von secare) genennt, weil diese Linie so lang außer der Peripherie fortgezogen werden muß, bis sie die Tangente schneidet.

Wenn man diese Linien bey einem Winkel oder Bogen wirklich zieht, und dann zu selbem die Ergänzung zu einem rechten Winkel sucht, so werden der Sinus, Tangente, Sekante dieses Ergänzungswinkels, der Kosinus, Kotangente, Kosekante des ersten Winkels genennt, und so auch wechselweise. So ist in Fig. 123 fd der Sinus des Winkels m, und fk sein Kosinus, ab die Tangente, gh die Kotangente; ac die Sekante, und gc die Kosekante. Umgekehrt kann man eben sowohl sagen, daß fk der Sinus von n und fd sein Kosinus sey u. s. f.

§. 5. Anmerk. Von besonderer Brauchbarkeit sind aber nur unter diesen Linien der Sinus, Kosinus, und höchstens noch die Tangente. Die übrigen Linien dienen mehr zur spekulativen, als zur ausübenden Trigonometrie. Zum Ueberfluße wollen wir noch den Quersinus (Sinus versus) das Segment des Radius welches zwischen dem Bogen und dem Sinus liegt, als ein solches Geschöpf anführen, um doch seine Bedeutung zu wissen. Es ist Fig. 124 die Linie fd.

§. 6. Zusatz. Weil Parallеln zwischen Parallеln gleich sind, so ist der Kosinus ab allemal gleich dem Radius fc weniger dem Quersinus fd; denn es sind Fig. 124 bey bc und d rechte Winkel, also ma-

machen allemal zween innere Winkel 180° aus, und die Linien sind demnach parallel. In Zukunft wird daher allemal der Radius, weniger dem Quersinus, den Kosinus bedeuten müssen.

§. 7. Zusatz. Zween Nebenwinkel haben einerley Sinus; denn nehme man Fig. 125 einen stumpfen Winkel an, ziehe den Sinus, so wird nach der Definition für den spitzigen Nebenwinkel kein anderer Sinus mehr möglich seyn, als der, den man eben gezogen hat.

§. 8. Erkl. Linien sind negativ, wenn sie zu andern, die man positiv heißt, eine Gegenrichtung nehmen, oder in entgegengesetzte Lagen der Figur begriffen sind. Z. B. wenn jene Linie die ich von oben herab, oder von der Rechten zur Linken, ziehen muß, positiv sind, so werden die anderen negativ genennt, die ich von unten herauf, oder von der Linken zur Rechten ziehen soll.

§. 9. Zusatz. Man sieht bey näherer Untersuchung ferner, daß Fig. 126 die Sinusse von Anfang bis 90° wachseu, daß der Sinus von 90° selbst dem Radius gleich ist, daß sie von da bis 180° abnehmen, und hier = 0 sind, daß sie ferner in der untern Hälfte des Zirkels wieder wachsen, aber im negativem Werthe, daß endlich bey 270° der Sinus dem negativen Radius gleich wird, und daß sie dann wieder bis 360 Grad abnehmen, und zum zweytenmal 0 werden.

§. 10. Zusatz. Bey einer gleichen Betrachtung des Kosinus wird man ebenfalls gewahr, wie er im ersten Quadranten mit positiven Werthe abnimmt, im zweyten mit negativen Werthe wächst,

im

im dritten eben so abnimmt, und im vierten wieder positiv wachsend wird. Es erhellet ferners, daß allemal der Kosinus wachse, wenn der Sinus abnimmt, und wechselseitig.

§. 11. Zusatz. Eben so einleuchtend ist es Fig. 127, wie die Tangente von 90° unendlich groß werden kann, weil da der Radius, oder vielmehr die werdensollende Sekante, mit der Tangente parallel läuft; und wie ferner auch die Tangente nach dem Beyspiele des Sinus in gewissen Lagen sich positiv, in andern wieder negativ denken läßt, und ebenfalls mit dem Sinus zunimmt.

§. 12. Lehrsatz. Wenn man den Sinus eines Bogens so lange verlängert, bis er eine Sehne wird, so ist dieser Sinus die Hälfte davon. Die Richtigkeit dieses Satzes fließt zwar schon aus der Zirkellehre, wo dargethan worden, daß jeder Radius, der eine Sehne perpendikulär schneidet, dieselbe auch halbieret; doch läßt sich die Sache sehr kurz auch auf einem andern Weg erweisen.

Satz. Fig. 128

$$ad = \tfrac{1}{2}\, af$$

Beweis.

Man verlängere den Radius, worauf der Sinus gefällt ist, zum Diameter, so ist

$$ad^2 = bd \times dg$$

Aber auch $df^2 = bd \times dg$

$$ad^2 = df^2$$

und $ad = df$

Allein

Allein $ad + df = af$
subſtit. $ad + ad = af$
abgek. $2\,ad = af$
$ad = \frac{af}{2}$ oder $\frac{1}{2}\,af$

§. 13. Zuſatz. Die Sinuſſe ſind alſo nichts anders, als halbe Sehnen, und weil keine halbe Sehne groͤßer werden kann, als der Radius, ſo ſind ſie alle eigentliche Bruͤche von ſelbem. Man ſezt daher wirklich in der Trigonometrie durchaus den Radius = 1 und ſucht daraus die Werthe der Sinuſſe in Decimalen.

§. 14. **Lehrſatz. Der Sinus eines Bogens oder Winkels von 30° iſt dem halben Radius gleich.**

Satz. Fig. 129

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}\,r$

Beweis.

Man ziehe in einem Zirkel den Radius, verbinde eine Sehne damit, die eben ſo groß als er ſelbſt iſt, und ſchließe das Dreyeck, ſo wird es aus dreyen Radiuſſen beſtehen, folglich gleichſeitig ſeyn, und ein Winkel 60° halten. Man theile nun ferner Bogen und Sehne durch einen andern Radius in zween gleiche Theile, ſo wird nach der Definition

$fb = \sin x$ ſeyn
allein $x = df = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$
und $fb = ab = \frac{af}{2} = \frac{r}{2}$
ſubſtit. $\frac{r}{2} = \sin 30$ oder
$\sin 30 = \frac{1}{2}\,r$

§. 15. Zusatz. Wenn nun r = 1, so ist sin 30° = ½ = 0,5. Der einzige Sinus unter allen, der sich rational finden läßt; weil nur von der Sehne, die dem Radius gleicht, bekannt ist, daß man sie genau einigemal, nämlich 6mal, an der Peripherie herumtragen kann; folglich ihr der sechste Theil der Peripherie, das ist 60°, und ihrer Hälfte der Sinus von 30° als Bogen entsprechen.

§. 16. Anmerk. Wie aber aus diesem einzigen rationalen Sinus alle übrige gefunden worden, wollen wir am Ende der Trigonometrie etwas ausführlicher zeigen. Genug, daß wir einsweilen wissen, daß sie zu unserm Gebrauche bereits alle, so genau als möglich, berechnet sind, und nur in den sogenannten Sinustafeln nachgeschlagen werden dörfen.

§. 17. Anmerk. Wolf in seinen Elementen zeigt zwar auch, wie man aus einem gegebnen Radius ein reguläres Fünfeck, Achteck, Zehneck u. s. f. beschreiben könne; aber es sind schon lauter Irrationalgrößen zum Grunde gelegt, folglich erhält man wieder für solche Sehnen Irrationalzahlen, die wir für Sinusse leichter auf andern Wegen erhalten. Wir werden vielleicht am Ende ein solches Beyspiel theils zur Probe unsers Verfahrens, theils zur Vergleichung anführen.

§. 18. Lehrsatz. Aus dem Sinus kann auch sein Kosinus berechnet werden. Es ist nach trigonometrischen Sinne der

Satz. Fig. 130

$$\text{cos.} = \sqrt{1 - \text{sin}^2}$$

Beweis.

Weil, wie wir oben sagten, der Kosinus ad immer = cb ist, und

$$cb^2 = ab^2 - ac^2$$
$$cb = \sqrt{ab^2 - ac^2}$$

so kann substit. werden $\text{cos.} = \sqrt{1 - \text{sin}^2}$

§. 19. Zusatz. Es ist also $\cos 30^\circ = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

§. 20. Zusatz. Weil nun der Sinus von 60° gleich ist dem Kosinus von 30°, so ist eben darum $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

§. 21. Lehrsatz. Die Tangente von 45° ist so groß als der Radius selbst.

Satz. Fig. 131

$$\tan 45^\circ = r$$

Beweis.

Man ziehe einen Radius, errichte auf denselben eine Tangente, die ebenfalls so groß ist, und schließe den rechten Winkel durch die Sekante, so hat man ein rechtwinklichtes gleichschenklichtes Dreyeck, wo jeder Winkel an der Hypothenuse 45° hält; also

	db	=	tang c
aber	db	=	r
also	tang c	=	r
	aber c	=	45°
subst.	tang 45°	=	r

§. 22. Zusatz. Alle Tangenten also, welche größern Bögen als 45° zukommen, sind größer, als der Radius, und wachsen bis 90° ins Unendliche fort.

§. 23. Zusatz. Weil $dc = \sqrt{db^2 + bc^2}$ so wird in diesen Fall nach der Substitution sec $45^\circ = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$ seyn.

§. 24.

§. 24. Lehrsatz. Wird die Tangente und Sekante allgemein mit Zuziehung des Sinus und Kosinus bestimmt, so ist die erste $= \frac{\sin}{\cos}$; die zweyte $= \frac{1}{\cos}$.

Beweis. Fig. 132.

I	Wegen ähnlichen △ △	II
$ad : dc = bf : fc$		$ac : bc = dc : fc$
$\tan : 1 = \sin : \cos$		$\sec : 1 = 1 : \cos$
$\tan \times \cos = \sin$		$\sec \times \cos = 1$
$\tan = \frac{\sin}{\cos}$		$\sec = \frac{1}{\cos}$

§. 25. Zusatz. Es ist richtig, daß der Kosinus von $90° = 0$, der Sinus $= 1$ die Tangente unendlich werde. Folglich ist hier nach aller Strenge erwiesen, daß, wenn dieß alles in dem Ausdruck $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ substituiert wird, $\frac{1}{0} = \infty$ sey.

§. 26. Zusatz. Wenn in beyden Ausdrücken statt cos sein Aequivalent $\sqrt{1 - \sin^2}$ substituiert wird, so bekömmt man folgende Formeln:

$\tan = \frac{\sin}{\sqrt{1 - \sin^2}}$; $\sec \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2}}$

§. 27. Zusatz. Es lassen sich auch in der Formel $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ der Sinus und Kosinus, wie jeder sieht, sogleich allein finden; Es ist nämlich

$$\sin = \tan \times \cos \text{ und } \cos = \frac{\sin}{\tan}$$

§. 28. Zusatz. Weil der Komplementswinkel oder Bogen von 45° ebenfalls 45° beträgt, so

 folgt

folgt daraus, daß in diesem Falle Sinus und Kosinus, Tangente und Sekante u. s. f. einander gleich sind. Folglich ist gemäß dem Ausdrucke $\sec = \frac{1}{\cos}$

auch $\sec 45° = \frac{1}{\sin 45}$ aber es ist

$$\sec 45 = \sqrt{2}$$

$$\text{also } \sqrt{2} = \frac{1}{\sin 45°}$$

$$\sin 45° \times \sqrt{2} = 1$$

$$\sin 45 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

§. 29. **Lehrsatz.** Die Kotangente wird aus dem Sinus und Kosinus, und die Kosekante aus dem Sinus allein bestimmt.

Sätze. Fig. 133

$$\cot = \frac{\cos}{\sin}. \quad \operatorname{cosec} = \frac{1}{\sin}$$

Beweis.

I $\triangle\, abc \backsim fgc$ wegen rechten und Wechselw. m und n

$$ab : bc = gc : fg$$
$$\cot : 1 = \cos : \sin$$
$$\cot \times \sin = \cos$$
$$\cot = \frac{\cos}{\sin}$$

II In eben diesen Dreyecken

$$ac : bc = fc : fg$$
$$\operatorname{cosec} : 1 = 1 : \sin$$
$$\operatorname{cosec} \times \sin = 1$$
$$\operatorname{cosec} = \frac{1}{\sin}$$

§. 30.

§. 30. **Zusatz.** Weil der Ausdruck der Kotangente gerade der umgekehrte von der Tangente ist, so erhellet, daß sich auch die Tangenten zweyer Bögen umgekehrt verhalten, wie ihre Kotangenten.

§. 31. **Zusatz.** Da es richtig ist, daß in ähnlichen Figuren gleichnamige Linien in Verhältniß stehen, so ist dieß auch von allen trigonometrischen Linien untereinander wahr, wenn sie ähnlichen Bögen zugehören. Es sind aber die Bögen dann ähnlich, wenn die Anzahl ihrer Grade gleich groß ist, oder was auf eines hinausläuft, wenn sie konzentrisch sind, und zwischen zwo Radiusrichtungen liegen. Die Wahrheit dieses Satzes fällt auch gleich beym Anblick der Figur in die Augen, wo nichts als ähnliche Dreyecke von trigonometrischen Linien angetroffen werden. So z. B. ist Fig. 134

$ab : bc = fd : dc$ u. s. f.

substit. $\text{Tang} : R = \text{tang} : r$

§. 32. **Erkl.** Der Sinus von 90°, welcher dem Radius gleich ist, und daher ein ganzes gilt, da alle übrige nur Brüche davon sind, heißt der Sinus totus.

§. 33. **Anmerk.** Man sieht aus allen diesem, wie viele Formeln durch Zuziehung anderer Linien; dann auch durch die Vergleichung der Ausdrücke selbst, die spekulative Trigonometrie zu fernern Schlüßen erobern könnte: uns dünkt genug zu seyn, nur die Bahn dazu eröffnet zu haben.

§. 34. **Lehrsatz.** In jedem Dreyecke verhalten sich die Seiten, wie die Sinusse ihrer Gegenwinkel; oder auch umgekehrt: Es verhalten sich die Sinusse der Winkel, wie ihre Gegenseiten.

Satz.

Satz. Fig. 135

ai : ad = sin d : sin i.

Beweis.

Man beschreibe um das Dreyeck einen Zirkel, theile die gegebnen Seiten, und ihre entsprechenden Bögen in zween gleiche Theile durch Perpendikularradiusse, so werden die halben Seiten zu Sinussen von Bögen, die das Maas der entgegengesetzten Peripherialwinkel sind. Es ist nun, wenn auch zuvor vom dritten Winkel ein Radius hereingezogen wird.

ag = $\frac{1}{2}$ ai

und af = $\frac{1}{2}$ ad Ferner

o = ah

und d = ah nach §. 83. Geom. daher

o = d Eben so

m = i

Endlich ag = sin o

af = sin m In Proportion gesetzt.

ag : af = sin o : sin m

substit. $\frac{1}{2}$ ai : $\frac{1}{2}$ ad = sin d : sin i

×2 ai : ad = sin d : sin i

§. 35. Zusatz. Kommen zwo andere Seiten in den Satz, so müssen diese statt jenen getheilt werden, und der Beweis ist der nämliche.

§. 36. Anmerk. Dieser Lehrsatz muß wohl gemerkt werden, denn er ist die Grundlage der ganzen praktischen Trigonometrie. Wir werden bemüht seyn, alle Fälle auf diesen Satz zu gründen, und uns anderer Linien z. B. der Tangenten so wenig als möglich bedienen.

§. 37. Lehrsatz. Wenn in einem Dreyecke, wo man will ein Winkel in zween beliebige Theile getheilt,

getheilt, und die Theilungslinie bis zur Gegenseite verlängert wird, so verhalten sich die Sinusse der Winkeltheile, ordentlich wie die Abschnitte dieser Gegenseite, und umgekehrt, wie die angränzenden Seiten.

Satz. Fig. 136

$$\sin y : \sin x = \frac{cb}{ab} : \frac{cd}{ad}$$

Beweis.

$$\sin y : \sin m = bc : ab$$
$$\sin o : \sin x = ad : cd$$

$$\sin x \times \sin o : \sin m \times \sin x = bc \times ad : ab \times cd$$

Aber $\sin m = \sin o$ Als Sinus von Nebenw. daher subſtit.

$$\sin y \times \sin m : \sin m \times \sin x = bc \times ad : ab \times cd$$

$$(: \sin m) \quad \sin y : \sin x = bc \times ad : ab \times cd$$

$$(ab \times ad):$$

$$\sin y : \sin x = \frac{bc \times ad}{ab \times ad} : \frac{ab \times cd}{ab \times ad}$$

oder $\sin y : \sin x = \frac{bc}{ab} : \frac{cd}{ad}$

§. 38. **Lehrsatz.** Wenn in einem gleichschenklichten Dreyecke der Winkel am Scheitel in zween gleiche Theile getheilt, und vom Theilungspunkt eine gerade Linie an die Grundlinie hin gezogen wird, so ist die halbe Grundlinie nach trigonometrischen Ausdrücken gleich dem Produkte aus einem Schenkel in den Sinus des halben Scheitelwinkels, und folglich die ganze Grundlinie einem doppelten solchen Produkte.

Satz.

Satz. Fig. 137

$\frac{1}{2} b = c \times \sin \frac{1}{2} v$, wo c einen Schenkel (crus), und v den Scheitelwinkel (vertex) bezeichnet.

Beweis.

$$df = \sin o$$
$$vd = r$$

$$df : vd = \sin o : r$$

subſtit. $\frac{1}{2} b : c = \sin \frac{1}{2} v : 1$

$$\frac{1}{2} b = c \times \sin \frac{1}{2} v$$

oder $b = 2 c \times \sin \frac{1}{2} v$

§. 39. Zusatz. Wird nun c oder $\sin \frac{1}{2} v$ nach der Transpositionslehre allein gesucht, so erhält man

$$c = \frac{b}{2 \sin \frac{1}{2} v}$$

und $\sin \frac{1}{2} v = \frac{b}{2 c}$

§. 40. Lehrsatz. Die ganze Grundlinie in einem solchen Dreyecke ist auch gleich dem Produkt einer Seite in den Sinus des ganzen obern Winkels durch den Kosinus desselben halben Winkels dividiert.

Satz Fig. 138

$$b = \frac{c \times \sin v}{\cos \frac{1}{2} v}$$

Beweis.

Man mache den Schenkel zum Radius, und ziehe den Sinus des ganzen Scheitelwinkels, so ist

Δ

$\triangle acd \backsim \triangle bhd$ wegen gemeinschaftlichen und rechten Winkel

also $ad : ac = bd : bh$

oder $c : \cos\frac{1}{2}v = b : \sin v$

$$\cos\tfrac{1}{2}v \times b = c \times \sin v$$

$$b = \frac{c \times \sin v}{\cos\frac{1}{2}v}$$

§. 41. **Zusatz.** Will man den Sinus des ganzen Winkels in lauter trigonometrischen Grössen bekommen, so substituiere man so in obiger Proportion:

$$ad : ac = bd : bh$$

$$1 : \cos\tfrac{1}{2}v = 2\sin\tfrac{1}{2}v : \sin v$$

$$\sin v = 2\sin\tfrac{1}{2}v \times \cos\tfrac{1}{2}v$$

§. 42. **Zusatz.** Eben dieß erhält man auch, wenn man die beyden Werthe von b, welche oben gefunden worden, in eine Gleichung setzt und fort kalkuliert, bis man $\sin v$ allein hat. Es ist demnach

1) $b = 2c \times \sin\frac{1}{2}v$

2) $b = \dfrac{c \times \sin v}{\cos\frac{1}{2}v}$

$$2c \times \sin\tfrac{1}{2}v = \frac{c \times \sin v}{\cos\frac{1}{2}v}$$

$:c$

$$2\sin\tfrac{1}{2}v = \frac{\sin v}{\cos\frac{1}{2}v}$$

$$2\sin\tfrac{1}{2}v \times \cos\tfrac{1}{2}v = \sin v$$

§. 43. **Anmerk.** Diese und andere dergleichen Ausdrücke werden uns bey Berechnung der Polygone sehr gut zu statten kommen.

§. 44. **Lehrsatz.** Der Sinus eines halbierten solchen Winkels ist auch gleich der Quadratwur-

wurzel aus dem halben Sinusversus des ganzen Scheitelwinkels, oder auch weniger dem Kosinus halbiert.

Satz. Fig. 138

$$\sin \frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1 - \cos v}{2}}$$

Beweis.

$$ad : cd = bd : bh$$

subst. $1 : \sin \frac{1}{2} v = 2 \sin \frac{1}{2} v : (1 - \cos v)$

$$2 \sin^2 \frac{1}{2} v = 1 - \cos v$$

$$\sin^2 \frac{1}{2} v = \frac{1 - \cos v}{2}$$

$$\sin \frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1 - \cos v}{2}}$$

§. 45. Anmerk. Ob ich gleich wegen Vermeidung der Weitläuftigkeit nicht gesinnet war, von diesem Satze Gebrauch zu machen, so konnte ich doch nicht umhin, selben den übrigen Lehrsätzen der Trigonometrie einzuverleiben; um zu beweisen, wie kurz und faßlich sich diese mathematische Wahrheit erhärten läßt; da doch Klemm in seinem Lehrbuche §. 735 eine so unnöthige Länge und Schwierigkeit dabey affektiert.

Berechnung der Dreyecke.

§. 46. Eintheilung. Sämmtliche Aufgaben der ebnen Trigonometrie können füglich in drey Klassen abgetheilt werden. Zur ersten gehören jene Fälle, wo eine Seite und zween Winkel, folglich auch mittelbar der dritte, gegeben sind. Zur zweyten, wenn zwo Seiten und ein Winkel gegeben sind. Und zur dritten gehört ein einziger Fall, wenn nämlich alle Seiten bekannt sind, man soll die Winkel bestimmen.

Erste Klasse.

§. 47. **Zusatz.** Weil bey den Aufgaben dieser Klasse jeder zu bestimmenden Seite ein Winkel entgegengesezt ist, so lassen sich alle Aufgaben derselben aus dem obigen Lehrsatze vom Verhältniße der Seiten zu den Sinussen der Gegenwinkel auflösen.

§. 48. **Aufgabe.** Es halte in dem Dreyecke Fig. 139 abc der Winkel $a = 36°, 19'$ der Winkel $b = 44°5'$, und die Seite $bc = 126'$; wie groß ist die Seite ab?

Auflösung. Weil ab dem Winkel c entgegensteht, so muß erst c bestimmt werden. Es ist aber $c = 180° - (36,°19' + 44°,5') = 180° - 80,°24' = 99°,36'$. Allein stumpfe Winkel haben in den Tafeln keine Sinusse, also muß der Nebenwinkel von 99,°36, gesucht werden, folglich $180° - 99°,36' = 80°,24'$; weil zween Nebenwinkel einerley Sinus geben.

Nun ist ferner $ab : \sin c = bc : \sin a$

substit. $x : \sin 80,°24' = 126' : \sin 36°,19'$

In den Tafeln $x : 0,985996 = 126 : 0,5922476$

$x \times 0,5922476 = 0,985996 \times 126$

$= 124,235496$

$$x = \frac{124,235496}{0,5922476}$$

$x = 209,7''$

§. 49. **Anmerk.** Ungleich kürzer fallen aber dergleichen Rechnungen aus, wenn man sich der Logarithmen bedient, die in den Tafeln allemal daneben zu stehen pflegen. Man sieht aus der Proportion also gleich, wessen Logarithmen zusamm addirt, und was für einer abgezogen werden müsse.

Die

Die Rechnung sieht nun so aus.

$$\begin{array}{ll} \text{Log. sin } 80^0 & = 9{,}9938752 \\ \text{Log. } 126 & = 2{,}1003705 \\ \hline & \ 12{,}0942457 \\ \text{Log. } 36^\circ 19' & = 9{,}7725033 \\ \hline & \ 2{,}3217424 \end{array}$$

Weil dieser Logarithm einer Seite entsprechen muß, so wird er bey den natürlichen Zahlen aufgeschlagen, wo ihm die obige Zahl 209,7 zugehört.

§. 50. Anmerk. Von der Natur und dem Gebrauche der Logarithmen ist zwar schon in der Algebra unter seinem Artikel umständlich geredet worden. Doch muß hier noch hie und da etwas von den Logarithmen trigonometrischer Linien erinnert werden. Die Grundlage oder Basis derselben ist die Eintheilung des Radius in 10000000000 gleiche Theile, wie es Pitiskus in seinem großen Kanon gethan. Daher hat der Logarithm des Sinus totus zum Kennziffer 10. In den gemeinen Tafeln, wie in Blaks oder Wolfs seinen, ist der Radius zwar nur in 10000000 Theile getheilt, folglich müßte der Logarithm vom Sinus totus zum Kennziffer die Zahl 7 haben, aber er hat dem ungeachtet 10; und alle Kennziffer durchaus sind um 3 zu groß, weil sie aus den obbemeldten Kanon ausgeschrieben worden. Es bringt indeß diese Unrichtigkeit keinen Fehler in die Rechnung; da bey Proportionen, wenn grosse Kennziffer addiert und dann wieder abgezogen werden, immer das nämliche bleibt. Es sind ferner Blaks, Wolfs, u. a. dgl. Tafeln so eingerichtet, daß man mit jedem aufgeschlagenen Blatte zween Winkel oder Bögen antrift, den einen diesseits, den andern jenseits, welche miteinander 90° machen: folglich wenn auf der einen Seite Sinusse und Tangenten sind, so befinden sich auf der andern Seite die Kosinusse und Kotangenten, und so auch umgekehrt. Z. B. man schlägt den Sinus von 20° auf, so steht gerade über auch der Sinus von 70°, das ist sein Kosinus, u. s. f. Die Sekanten und Sinus versus sind wegen ihrer Entbehrlichkeit ganz weggelassen worden. Im Fall man aber ihrer nöthig hätte, so sind sie und ihre Logarithmen bald gefunden. Es darf nur, gemäß der Formel $\sec = \frac{1}{\cos}$ und $\sin \text{vers.} = 1 - \cos$ verfahren werden. Endlich für stumpfe Winkel ist kein Sinus anzutreffen. Weil aber bekannt ist, daß zween Nebenwinkel einerley Sinusse haben, so muß also allemal des stumpfen Winkels Komplement zu 180° genommen und aufgesucht werden.

§. 51.

§. 51. Zusatz. Bey den Aufgaben der ersten Klasse kann also trigonometrisch nur um eine Seite des Dreyeckes gefragt werden; denn der dritte Winkel bestimmt sich schon arithmetisch.

Zweyte Klasse,

wenn zwo Seiten und ein Winkel gegeben ist.

§. 52. Eintheilung. Entweders befindet sich der gegebne Winkel nicht zwischen den gegebnen Seiten: oder er ist von selben eingeschlossen.

Erster Fall.

§. 53. Anmerk. Hier wird allemal etwas vom Gegebnen und Gesuchten nach §. 34 gegeneinander stehen. Es muß aber oft vorher ein anders Stück gefunden werden, um das Verlangte zu erhalten. Z. B. Es soll ein Winkel gefunden werden, dem gerade keine gegebne Seite entgegen steht. Man suche also allererst den andern Winkel, dem gewiß eine bekannte Seite opponiert ist, so wird der dritte als Komplement zu 180° auch bekannt seyn.

§. 54. Aufgabe. Es sey Fig. 140 in dem Dreyecke abc

$$ab = 250'$$
$$c = 76°19$$
$$bc = 184' \text{ und } a = x$$

Auflösung. Weil hier alles einander gegenübersteht, so ist

$$ab : bc = \sin c : \sin a$$

subſtit. $250 : 184 = \sin 76°19' : \sin x$

Log.	184	= 2,2648178
Log.	76,°19	= 9,9874955
		12,2523133
Log.	250	2,3979400
		9,8543733 = Log. x Welchem

die Größe 45°,39' entspricht.

§. 55. Aufgabe. In dem Dreyeck b d f Fig. 141 sey

b = 133°20′
b f = 300′
f d = 514′
b d = x

Auflösung. Weil der Seite b d auch ein unbekannter Winkel entgegensteht, so muß allererst der andere Winkel gefunden werden. Man bestimme zuvor den Nebenwinkel von 133°,20′. Er ist 180° − 133°,20 = 46°,40′.

Es ist demnach

f d : b f = sin b : sin d

substit. 514′ : 300′ = sin 46°40′ : sin x

Log. 300 = 2,4771213
Log. sin 46°,40′ = 9,8617576

12,3388789

Log. 514 = 2,7109631

Log. x = 9,6279158

Die entsprechende Zahl dafür ist 25°7′ = d Es machen nun die beyden Winkel 133°20′ + 25°,7′ = 158°,27′; folglich der dritte Winkel 180° − 158°,27′ = 21°33′ = f. Nun ferner

b d : f b = sin f : sin d
x : 300 = sin 21°,33′ : sin 25°7′

Log. 300 = 2,4771213
Log. sin 21°,33′ = 9,5650363

12,0421576

Log. sin 25°,7′ = 9,6278397

Log. b d = 2,4143179 dessen zugehörige Zahl 259,6″ ist.

Zwey-

Zweyter Fall.

§. 56. Zusatz. In Aufgaben von Dreyecken, wo zwo Seiten und der zwischenliegende Winkel gegeben sind, weis man zwar die Summe der übrigen zween Winkel, aber ihre Differenz nicht. Hätte man auch diese, so würde nach der Algebra die halbe Summe sammt der halben Differenz den grössern Winkel von beyden geben; und die halbe Summe weniger der halben Differenz den kleinern Winkel.

§. 57. Lehrsatz. Die halbe Differenz der übrigen zween Winkel läßt sich in diesem Fall allemal bestimmen; denn es verhält sich die Summe der gegebnen Seiten zu ihrer Differenz; wie die Tangente der halben Summe der übrigen beyden unbekannten Winkel zur Tangente ihrer halben Differenz.

Satz. Fig. 142

$$(ad + ab) : (ad - ab) = \text{tang}\,\frac{b+d}{2} : \text{tang}\,\frac{b-d}{2}$$

Beweis.

Man beschreibe mit der kleinern gegebnen Seite aus dem Scheitelpunkt des gegebnen Winkels einen Zirkel, verlängere die grössere von den gegebnen Seiten um die Grösse des Radius rückwärts, verbinde immer zween Radiusse mit Sehnen und ziehe mit einer der Sehnen vom Endpunkt der grössern Seite eine Linie parallel, bis die andere verlängerte Sehne sie schneidet, so ist

$$m = o + n$$

auch $m = b + d$

$$o + n = b + d; \text{ aber } o = n$$

also

also $\quad 2n = b + d$ und $n = r + d$

subst. $\quad 2(r+d) = b+d$

$:2 \quad r+d = \frac{b+d}{2}$; der halben Summe

$\times 2 \quad 2r + 2d = b+d$

$2r = b - d$

$:2 \quad r = \frac{b-d}{2}$ der halben Differenz.

Nun ist wegen dem Parallelschnitt in dem Dreyecke gfd

$$gd : cd = gf : bf \text{ oder}$$

$(ad + Rad) : (ad - Rad) = \text{tang}(r+d) : \text{tang}\, r$

subst. $(ad + ab) : (ad - ab) = \text{tang}\frac{(b+d)}{2} : \text{tang}\frac{(b-d)}{2}$

Anwendung. Es sey $ad = 590$

$ab = 370$

$a = 57°34'$

Folglich $b + d = 180 - 57°34'$

$= 122°,26'$

Proportion $(590 + 370) : (540 - 320) =$

$= \text{tang}\, \frac{122°,26'}{2} : \text{tang}\, x$

abgek. $960 : 220 = \text{tang}\, 61°,13' : \text{tang}\, x$

Log. 220 $\quad = 2,3424227$

Log. tang 61°,13 $= 10,2601304$

$\quad 12,6025531$

Log. 960 $\quad = 2,9822712$

Log. tang x $\quad = 9,6202819$, welchen ein Bogen von 22°38′ entspricht, der die halbe Differenz der beyden unbekannten Winkel ausdrückt. Wird dieß nun zur halben Summe 61°,13′ addiert, nämlich 61°13′ + 22°38′ = 83°,51′ so hat man den größern Winkel; zieht man sie aber von einander ab 61°13′ − 22°,38′ = 38°35′ so wird dieß der kleine Winkel d seyn. §. 58.

§. 58. Zusatz. Sind einmal die Winkel da, so ist nichts leichters, als auch die dritte Seite zu finden.

§. 59. Zusatz. Bey rechtwinklichten Dreyecken darf dieser Fall nicht so mühsam berechnet werden; denn es läßt sich allemal aus zwo gegebnen Seiten die dritte durch den pythagorischen Lehrsatz finden; und ist diese einmal da, so hat es keine Mühe mehr, auch die Winkel zu bestimmen.

§. 60. Zusatz. Indeß kann die Sache auch bey schiefwinklichten Dreyecken durch lauter Sinusse abgethan werden. Man fälle vom Endpunkte der kleinern gegebnen Seite auf die größere einen Perpendikel herab, so entstehen zwey Dreyecke, nämlich Fig. 143 abc und acd. Man ziehe ferner den bekannten Winkel von 90° ab, so ist auch der Winkel o gefunden. Nun um ac und bc zu finden, dienen folgende Proportionen ac : ab = sin b : sin tot. Dann bc : ab = sin o : sin tot. Es sind also, wenn das gefundene bc von bd abgezogen wird in dem rechtwinklichten Dreyeck acd zwo Lothen sammt dem eingeschloßnen rechten Winkel bekannt, wo dann alles übrige leicht zu finden ist.

Dritte Klasse.

§. 61. Lehrsatz. In Dreyecken, wo alle Seiten bekannt sind, ist der Kosinus des mittleren Winkels gleich der Summe der Quadraten von der grösten und kleinsten Seite, weniger dem Quadrat der mittleren Seite, dieß alles dividiert durch das doppelte Produkt der kleinsten und grösten Seite. Wenn demnach Fig. 144 a die gröste, b die mittlere, c die kleinste Seite, und m den mittleren Winkel bedeutet, so ist der

Satz.

$$\cos m = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

Beweis.

Man beschreibe mit der kleinsten Seite aus dem größern anliegenden Winkel derselben einen Zirkel durch das Dreyeck, verlängere die mittlere Seite um den Radius, damit sie sammt der grösten Seite Sehnen werden, die sich außer der Peripherie durchschneiden. Es ist also nach §. 167 Geom.

$$kb \times bg = bi \times bf$$

aber $kb = ab + Rad$

oder $= ab + ai$

und $bg = ab - Rad$

oder $= ab - ai$

substit. $(ab + ai) \times (ab - ai) = bi \times bf$

oder $(b + c)(b - c) = ax$

$$b^2 - c^2 = ax$$

$$\frac{b^2 - c^2}{a} = x = bf$$

Wenn nun bf vom ganzen bi abgezogen, und der Rest als Sehne halbiert wird, so hat man den Werth des Kosinus von i in einem Ausdrucke, wo der Radius die kleinste Seite bedeutet. Daher $a - \frac{b^2 + c^2}{a} = fi$

$$a - \frac{b^2 + c^2}{a} = fi$$

oder $\frac{a^2 - b^2 + c^2}{a} = fi$

$: 2 \quad \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a} = \frac{fi}{2} = di = \cos m$

weil ad der Sinus von m ist.

Will

Will man nun, daß der Radius nicht die ganze kleinste Seite, sondern eine Einheit bedeuten soll, so gilt folgende Proportion

$$R : \text{Cos}\,m = r : \cos m \quad \text{§. 31.}$$

subſtit. $$c : \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a} = r : \cos m$$

$$\cos m \times c = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$$

$$\cos m = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ac}$$

Anwendung. Es sey in dem Dreyeck abc

$$bi = 76 = a$$
$$ab = 68 = b$$
$$ai = 52 = c$$

also $$\cos i = \frac{76^2 - 68^2 + 52^2}{2 \times 76 \times 52}$$

$$= \frac{5776 - 4624 + 2704}{7904}$$

$$= \frac{3856}{7904} = 0{,}48784 \text{ u. ſ. f.}$$

Wird nun dieß in den Sinustabellen nachgeschlagen, so findet man gerade gegenüber den Kosinus von 60°48′ als des ihm nächst entsprechenden Winkels.

§. 62. **Zusatz.** Indeß scheint die Rechnung immer kürzer und leichter zu seyn, wenn man mit dem Beweise auch gleich die Auflösung mit einflechtet. Z. B. wenn das Segment bf Fig. 144 durch Logarithmen gefunden ist, und nach Abzug desselben von bi, mit der Hälfte und den darauf gefällten Perpendikel folgende Proportion angestellt wird.

$$ai : di = \sin r : \sin o \quad \text{oder}$$

weil $$\sin o = \cos m \quad \text{ist}$$

$$ai : di = \sin 90 : \cos m$$

§. 63. Zusatz. Obige Formel fällt stark zusammn, wenn das Dreyeck gleichschenklicht ist. Denn bey spitzwinklichten wird die Seite $a = b$ und bey stumpfwinklichten $b = c$ seyn; folglich ist im ersten Fall

$$\cos m = \frac{a^2 - a^2 + c^2}{2ac} = \frac{c^2}{2ac} = \frac{c}{2a}$$

Im zweyten Fall

$$\cos m = \frac{a^2 - b^2 + b^2}{2ac} = \frac{a^2}{2ac} = \frac{a}{2c}$$

Anwendung der Trigonometrie auf Polygone und Zirkelabschnitte.

§. 64. Lehrsatz. Die Seite eines regulären Vieleckes läßt sich aus dem Zentralwinkel und dem Polygonradius trigonometrisch bestimmen. Es ist, wenn der Polygonradius $= a$, der Zentralwinkel $= c$, und die Seite $= l$ heißt, der

Satz

$$l = 2a \sin \tfrac{1}{2} c$$

Beweis.

Es ist § 38 erhärtet worden, daß in jedem gleichschenklichten Dreyecke $b = 2c \times \sin \frac{1}{2} v$. Da aber hier b die Polygonseite, c den Polygonradius und v den Zentralwinkel bedeutet, so ist nach der Substitution der Satz vollkommen erwiesen.

§. 65. Zusatz. Wird statt c die Anzahl der Seiten gegeben, so ist, weil $c = \frac{360}{n}$, mehrmal

$$l = 2a \sin \tfrac{1}{2} \times \frac{360}{n} = 2a \sin \frac{180}{n}$$

§. 66.

§. 66. Lehrsatz. Der Flächeninhalt eines regulären Polygones ist gleich dem halben Produkte des Sinus vom Zentralwinkel in das Quadrat des Polygonradius durch die Anzahl der Seiten multipliciert.

Satz.

$$Q = \frac{n a^2 \sin c}{2}$$

Beweis.

Die Basis eines Zentraldreyeckes ist der Seite gleich also

$b = 2 a \times \sin \frac{1}{2} c$

der Perpend. $p = a \cos \frac{1}{2} c$ denn Fig. 145 ist

$cg : cd = \sin d : \sin 90$ oder

$p : a = \cos \frac{1}{2} c : 1$ d. i. $p = a \cos \frac{1}{2} c$

mult. $b p = 2 a^2 \sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} c$

Aber es ist oben §. 41 erwiesen worden

daß $2 \sin \frac{1}{2} c \times \cos \frac{1}{2} c = \sin c$

subsit. $b p = a^2 \sin c$

$:2$ $\Delta \frac{b p}{2} = \frac{a^2 \sin c}{2}$ Es sind aber beym Poligon n solcher $\Delta\ \Delta$

$\times n$ $n \Delta = \frac{n a^2 \sin c}{2}$

oder $Q = \frac{n a^2 \sin c}{2}$

§. 67. Zusatz. Weil $c = \frac{360}{n}$, so wird eben darum auch allgemein $Q = \frac{n a^2 \sin \frac{360}{n}}{2}$ seyn.

§. 68. Zusatz. Will man diese Ausdrücke logarithmisch berechnen, so wird am Ende vom Kenn-

ziffer

ziffer allemal 10 weggestrichen; weil der Sinus totus überall = 1 gesetzt, das heißt, ausgelassen worden.

§. 69. **Anmerk.** Man vergleiche unsern Satz mit Klemms Lehrbuche §. 764, wende sie auch beyde praktisch an, und sehe dann, welcher richtiger ist. Klemm hat darinn geirrt, daß er den Polygonradius mit dem trigonometrischen Radius verwechselte. Anfangs bezeichnete er zwar jenen mit a, und diesen durch r; allein mitten im Beweise fängt er wieder an: ist nun r = a, so ist u. s. f. Dieß kann aber nicht statt finden; weil der trigonometrische Radius immer einen beständigen Werth beybehält, da ihn der andere nach Belieben verändern kann, ohne die Allgemeinheit des Satzes zu stören. Nichts wundert mich mehr, als jene neue Auflage des Klemms, die Remigius Döttler, Priester der frommen Schulen in Wien 1786 veranstaltet, wo alle Fehler desselben, deren es doch mehrere giebt, wieder getreulich abgedruckt wurden. Vielleicht hätte ich das nämliche Schicksal, wenn ich mir beygehen ließ, irgend ein hebräisches Werkchen von neuem heraus zu geben. Döttler verspricht überdieß auf dem Titelblatte Anmerkungen und Erläuterungen, wovon ich aber fast gar keine fand, obwohl sie dem Studierenden an manchen Orten sehr willkommen gewesen wären.

§. 70. **Lehrsatz.** Das Segment eines Zirkels ist, wenn r den Radius, c die Grade des Bogens, und π die Zahl 3,14 bedeutet, dem Ausdrucke: $\left(\frac{c\pi}{360} - \frac{\sin c}{2}\right) r^2$ gleich.

Beweis.

Der Sektor ist, wie §. 209. Geom. gezeigt worden, wenn statt a das c substituiert wird $= \frac{c r^2 \pi}{360}$.

Ferner, wie wir eben gefunden, ist der Inhalt jenes gleichschenklichten Dreyeckes, das davon abgezogen werden muß, wenn r den Schenkel bedeutet $\frac{r^2 \sin c}{2}$

Folglich der Rest oder das Segment $\frac{c r^2 \pi}{360} - \frac{r^2 \sin c}{2}$ $= \left(\frac{c\pi}{360} - \frac{\sin c}{2}\right) r^2$

§. 71.

§. 71. Zusatz. Ist der Bogen 180°, so wird der Sinus = 0 und der Ausdruck ändert sich in diesen um: $\left(\frac{180\,\pi}{360} - 0\right) r^2 = \frac{\pi r^2}{2}$ welches die halbe Zirkelfläche ausdrückt.

§. 72. Anmerk. Es wäre noch ein weites Feld übrig, wie aus verschiednen gegebnen Stücken eines Dreyecks, Vierecks u. s. f. der Inhalt derselben, oder andere Größen gefunden werden können; doch, um nicht zu weitläuftig zu werden, wollen wir sie weglassen.

Von Erfindung der Sinusse n facher Bögen, als ein Anhang zur ebnen Trigonometrie.

Man versteht unter dieser Anweisung die Lehre, wie aus dem bekannten Sinus eines Bogens z. B. des Bogens von 30° die Sinusse aller übrigen Bögen gefunden werden können. Darüber sind mir zwo Methoden bekannt; eine vom Wolf, die andere von Klemm. Erstere ist zwar richtig, aber nicht aus der Natur der Sache selbst; sondern durch einen Umweg hergeholt. Letztere beruht auf chimerischen Größen, und ist überaus mühsam. Ich wollte daher keinen dieser Wege einschlagen, sondern mir eine neue Bahn eröffnen, wo dieß Geschäft eine weit natürlichere Wendung bekommen soll; allein ich erblickte eine geraume Zeit nachher fast die nämliche Verfahrungsart bey Hrn. v. Segner, welches mich natürlich theils erfreuen, theils auch böse machen mußte.

Ein

Ein Paar Lehrsätze müssen wir voraus schicken, und dann läßt sich die Sache einlenken. Hier sind sie sammt ihren Beweisen.

§. 73. **Erster Lehrsatz.** Der Summsinus zweener Bögen, deren Radius eins gelten soll, ist die Summe der wechselweise in einander multiplicierten Sinusse und Kosinusse der einzelnen Bögen. Es heiße der Winkel eines Bogens m, des andern o, die Summe derselben s, so ist der

Satz Fig. 146

$$\sin s = \sin o \times \cos m + \sin m \times \cos o$$

Beweis.

Man ziehe die Winkel, Bögen und Sinusse wirklich, so wird, wegen Aehnlichkeit der Dreyecke folgendes Paar Verhältnisse statt haben.

$$fa : fs = df : cf \text{ oder}$$

$$\sin s - cf : \cos o - df = df : cf$$

Aber cf und df zu finden ist auch

$$cf : cd = bs : hs \text{ oder}$$

$$cf : \sin o = 1 : \cos m \text{ also}$$

$$cf = \frac{\sin o}{\cos m}$$

Und

$$cd : df = hs : bh \text{ oder}$$

$$\sin o : df = \cos m : \sin m$$

$$df = \frac{\sin o \times \sin m}{\cos m}$$

Diese Werthe nun in der erstern Gleichung substituiert, so erhält man

sin s

$$\left(\sin s - \frac{\sin o}{\cos m}\right) : \left(\cos o - \frac{\sin o \ \sin m}{\cos m}\right)$$

$$= \frac{\sin o \ \sin m}{\cos m} : \frac{\sin o}{\cos m}$$

abgek. $\left(\sin s - \frac{\sin o}{\cos m}\right) : \left(\cos o - \frac{\sin o \ \sin m}{\cos m}\right)$

$$= \sin m : 1$$

$$\sin s - \frac{\sin o}{\cos m} = \sin m \ \cos o - \frac{\sin o \ \cos\sin^2 m}{\cos m}$$

$$\sin s = \sin m \ \cos o + \frac{\sin o}{\cos m} - \frac{\sin o \ \sin^2 m}{\cos m}$$

$$\sin s = \sin m \ \cos o + \frac{(1 - \sin^2 m) \ \sin o}{\cos m}$$

aber $1 - \sin^2 m = \cos^2 m$ subſtit.

$$\sin s = \sin m \ \cos o + \frac{\cos^2 m \ \sin o}{\cos m}$$

$$\sin s = \sin m \ \cos o + \cos m \ \sin o$$

$$\sin s = \sin m \ \cos o + \cos m \ \sin o$$

§. 74. **Zuſatz.** Wären nun die beyden Bögen der Winkel o und m gleich, ſo würde $s = 2\,m = 2 \times o$ seyn; alſo $\sin 2\,m = \sin m \ \cos m + \sin m \ \cos m$
oder $\sin 2\,m = 2 \sin m \ \cos m$

§. 75. **Zuſatz.** Setze man ferner o wäre noch ſo groß als m, das iſt $o = 2\,m$, ſo würde $s = 3\,m$ seyn. Wenn nun in der obigen Formel
$\sin s = \sin m \cos o + \cos m \sin o$ ſubſt. wird, ſo giebt es
$\sin 3\,m = \sin m \ \cos 2\,m + \cos m \ \sin 2\,m$
Allein der Koſinus vom doppelten Winkel iſt noch unbekannt, ob wir gleich den Sinus deſſelben wiſſen: ihn zu finden dient aber folgender Lehrſatz.

§. 76. **Zweyter Lehrſatz.** Der Summkoſinus zweener Bögen iſt das Produkt der Koſi-

nuſſe

nusse einzelner Bögen, weniger dem Produkte ihrer Sinusse. Es sey alles wie vorhin, so ist der

Satz

$$\cos s = \sin o \sin m - \cos o \cos m$$

Beweis.

$as : fs = cd : fc$ oder

$\cos s : \cos o - df = \sin o : cf$

oder $cf : cd = bs : hs$ oder

$cf : \sin o = 1 : \cos m$

also $cf = \dfrac{\sin o}{\cos m}$

Und $df : cd = bh : hs$

$df : \sin o = \sin m : \cos m$

also $df = \dfrac{\sin o \sin m}{\cos m}$

Man substituiere nun die beyden gefundenen Werthe für df und cf in der ersten Gleichung

$$\cos s : \cos o - df = \sin o : cf$$

$$\cos s : \left(\cos o - \frac{\sin o \sin m}{\cos m}\right) = \sin o : \frac{\sin o}{\cos m}$$

$$\cos s = \left(\sin o \cos o - \frac{\sin^2 o \sin m}{\cos m}\right) : \frac{\sin o}{\cos m}$$

$$= \left(\sin o \cos o - \frac{\sin^2 o \sin m}{\cos m}\right) \times \frac{\cos m}{\sin o}$$

$$= \frac{\sin o \cos o \cos m}{\sin o} - \frac{\sin^2 o \sin m \cos m}{\cos m \sin o} \text{ abgek.}$$

$$\cos s = \cos o \cos m - \sin o \sin m$$

§. 77.

§. 77. Zuſatz. Setze man, nun wie vorhin, $o = m$ ſo iſt $s = 2\,m$ und $\cos o = \cos m$; $\sin o = \sin m$. Folglich

$$\cos 2\,m = \cos m \cos m - \sin m \sin m$$
$$\cos 2\,m = \cos^2 m - \mathrm{si}^2\, m$$

§. 78. Zuſatz. Nun ſind wir auch im Stande in der obigen Formel $\sin 3\,m = \sin m \cos 2\,m + \cos m \sin 2\,m$ ſowohl für $\sin 2\,m$, als für $\cos 2\,m$ die Werthe zu ſubſtituieren. Es entſteht

$$\sin 3\,m = \sin m \times (\cos^2 m - \sin^2 m) + \cos m \times (2 \sin m \cos m)$$
$$\sin 3\,m = \sin m \cos^2 m - \sin^3 m + 2 \cos^2 m \sin m$$
$$= 3 \sin m \cos^2 m - \sin^3 m$$

§. 79. Zuſ. Nimmt man ferner wie zuvor an, daß o noch ſo groß als m ſey, ſo iſt $s = 3\,m$ und es läßt ſich in der Formel $\cos s = \cos o \cos m - \sin o \sin m$ wieder ſubſtituieren. Denn weil erſtens $o = 2\,m$, ſo ergiebt ſich

$$\cos 3\,m = \cos 2\,m \cos m - \sin 2\,m \sin m$$

Weil zweytens $\cos 2\,m = \cos^2 m - \sin^2 m$
und $\sin 2\,m = 2 \sin m \cos m$
ſo iſt $\cos 3\,m = (\cos^2 m - \sin^2 m) \times \cos m - (2 \sin m \cos m) \times \sin m$

$$\cos 3\,m = \cos^3 m - \cos m \sin^2 m - 2 \sin^2 m \cos m$$
$$= \cos^3 m - 3 \cos m \sin^2 m$$

§. 80. Zuſ. Wenn nochmal angenommen wird, daß $o = 3\,m$, ſo iſt $s = 4\,m$ und die Formel $\sin s = \sin o \cos m + \cos o \sin m$ metamorphoſiert ſich erſtens in $\sin 4\,m = \sin 3\,m \cos m + \cos 3\,m \sin m$ §. 80, und nachher durch die Subſtitution der gefunderen Werthe für $\sin 3\,m$ und $\cos 3\,m$ wird

Sin

$\sin 4m = (3 \sin m \cos^2 m - \sin^3 m) \times \cos m +$
$(\cos^3 m - 3 \cos m \sin^2 m) \times \sin m$
$\sin 4m = 3 \sin m \cos^3 m - \cos m \sin^3 m + \sin m$
$\cos^3 m - 3 \cos m \sin^3 m$
$\sin 4m = 4 \sin m \cos^3 m - 4 \sin^3 m \cos m$

Zus. §. 81. Fährt man fort, so auch für den Kosinus des 4fachen Bogens zu substituieren, so erhält man

$$\cos 4m = \cos m^4 - 6 \sin^2 m \cos^2 m + \sin^4 m$$

Zus. §. 82. Die Tabelle für die vielfachen Sinusse wäre demnach, wenn wir statt Sinus nur schlechtweg s, und für Kosinus c setzen wollen, folgende

1) s
2) $2\,s\,c$
3) $3\,s\,c^2 - s^3$
4) $4\,s\,c^3 - 4\,s^3\,c$
5) $5\,s\,c^4 - 10\,s^3\,c^2 + s^5$
6) $6\,s\,c^5 - 20\,s^3\,c^3 + s^5\,c$
7) $7\,s\,c^6 - 35\,s^3\,c^4 + 21\,s^5\,c^2 - s^7$

Hält man demnach die Würden von $(c + s)$ in steigender Ordnung gegen diese Tabelle, so läßt sich die allgemeine Formel für den Sinus des nfachen Bogens leicht abziehen. Denn man betrachte die steigenden Würden hier

$(c+s)^1 = c+s$
$(c+s)^2 = c^2+2cs+s^2$
$(c+s)^3 = c^3+3c^2s+3s^2c+s^3$
$(c+s)^4 = c^4+4c^3s+bc^2s^2+4cs^3+s^4$
$(c+s)^5 = c^5+5c^4s+10c^3s^2+10c^2s^3+5cs^4+s^5$
$(c+s)^6 = c^6+6c^5s+15c^4s^2+20c^3s^3+15c^2s^4$
$+6cs^5+s^6$
$(c+s)^7 = c^7+7c^6s+21c^5s^2+35c^4s^3+35c^3s^4$
$+21c^2s^5+7cs^6+s^7$;

so

so wird man finden, daß immer das zweyte, vierte, sechste Glied u. s. f. jeder Würde mit abwechselnden Zeichen die Formel für den nämlichen vielfachen Sinus geben. Da nun die nte Würde von $(c + s)$ nach dem Binomium des Newtons, diese Reihe giebt:

$$c^n + \frac{n}{1} c^{n-1} s + \frac{n \times (n-1)}{1 \times 2} c^{n-2} s^2 + \frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{1 \times 2 \times 3} c^{n-3} s^3 + \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4} c^{n-4} s^4 + \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times (n-4)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} c^{n-5} s^5 + \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times (n-4) \times (n-5)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} c^{n-6} s^6$$

u. s. f., so ist klar, daß der Sinus des nfachen Bogens

$$= \frac{n}{1} c^{n-1} s - \frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{1 \times 2 \times 3} c^{n-3} s^3 + \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times (n-4)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} c^{n-5} s^5 - \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times (n-4) \times (n-5) \times (n-6)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7} c^{n-7} s^7$$

u. s. f.

Zus. §. 83. Auf eben diese Art läßt sich auch eine allgemeine Formel für den Kosinus des nfachen Bogen ausfindig machen. Denn, wenn man die obigen zerstreuten 4 ersten Kosinusse sammelt, und zu kalkulieren fortfährt, so ergiebt sich folgende Tabell, woraus sich wieder leicht eine allgemeine Formel für den Kosinus des nfachen Bogens abziehen läßt.

1) c

2) $c^2 - s^2$

3) $c^3 - 3 c s^2$

4) $c^4 - 6 s^2 c^2 + s^4$

5) $c^5 - 10 c^3 s^2 + 5 c s^4$

6) $c^6 - 15 s^2 c^4 + 5 s^4 c^2 - s^6$

7) $c^7 - 21 c^5 s^2 + 35 c^3 s^4 - 7 c s^6$

§. 84. Zus. Vergleicht man diese Abstammung der Ausdrücke voneinander mit der obigen Würdentabelle, so erhellet offenbar, daß die ungeraden Glieder mit abwechselnden Zeichen für den Kosinus des nämlichen vielfachen Bogens die Formel abgeben. Es ist demnach allgemein der cos des nfachen Bogens $= c^n - \frac{n(n-1)}{1 \times 2}$

$$c^{n-2} s^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4} c^{n-4} s^4$$

§. 85. Aufg. Um eine von diesen zwoen allgemeinen Formeln in einem besondern Falle anzuwenden, wollen wir durch die erstere den Sinus eines Bogens z. B. von 10 Graden finden.

Auflösung. Weil nur der Sinus von 30° allein rational ist nach §. 14 Trig. so wollen wir denselben als den Sinus eines einfachen Bogens zur Basis annehmen. Es wird demnach ein Bogen z. B. von 60° der zweyfache Bogen, der von 90° der dreyfache Bogen u. s. f. seyn. Geht man von 30° rückwärts, so erhellet, daß ein Bogen (setzen wir von 15°) um sich nach einer ähnlichen Art auszudrücken, der halbfache, also von 10° der drittelsfache Bogen von obiger Basis seyn müsse.

In unser Formel:

$$\sin n = n c^{n-1} s - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \times 2 \times 3} c^{n-3} s^3$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} c^{n-5} s^5 \text{ u. s. f.}$$

ist nun $n = \frac{1}{3}$

$s = \frac{1}{2}$

und $c = \sqrt{\frac{3}{4}}$ §. 20. Trig.

Deutlichkeits halber wollen wir jedes Glied der Generalformel besonders berechnen, und, weil ihre unend-

unendliche Reihe schnell zusamm fällt, uns mit 2 oder 3 Glieder begnügen. Das erste Glied giebt nach der Substitution $\frac{1}{3}\times(\sqrt{\tfrac{3}{4}})^{\frac{1}{3}-1}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\times(\sqrt{\tfrac{3}{4}})^{-\frac{2}{3}}$

$$=\frac{1}{6\times(\sqrt{\frac{3}{4}})^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{6\sqrt[3]{\frac{3}{4}}}=$$

$$\frac{1}{6\times0,0909}=\frac{1}{0,5454}=0,18335\ldots$$

Auf die nämliche Weise muß auch das zweyte Minusglied nach gehöriger Substitution berechnet, und von dem eben gefundenen abgezogen werden. Es ist demnach

$$\frac{\frac{1}{3}\times(\frac{1}{3}-1)\times(\frac{1}{3}-2)\times(\sqrt{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}-3}\times(\frac{1}{2})^{3}}{1\times2\times3}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\times-\frac{2}{3}\times-\frac{5}{3}\,(\sqrt{\frac{3}{4}})^{-\frac{8}{3}}\times\frac{1}{8}}{6}$$

$$=\frac{\frac{10}{27}\times\frac{1}{8}}{6\,(\sqrt{\frac{3}{4}})^{\frac{8}{3}}}=\frac{10}{216\times6\,(\sqrt{\frac{3}{4}})^{\frac{8}{3}}}$$

$$=\frac{5}{108\times6\sqrt[3]{(\frac{3}{4})^{4}}}=\frac{5}{648\sqrt[3]{\frac{81}{256}}}$$

$$=\frac{5}{648\times\frac{4,31}{6,35}}=\frac{5}{2792,88:6,35}$$

$$=\frac{5}{440}=0,0114$$

Wird diese Zahl von der obigen abgezogen: 0,18335 — 0,0114 = 0,17195, so hat man den Sinus schon in Hunderttheilchen, wie aus der Vergleichung mit den Tafeln erhellet, wo selber auf 0,1736482 angesetzt ist. Wenn nun auch das dritte Glied gesucht und addiert würde, so hätte man den Sinus in Tausendtheilchen u. s. f.

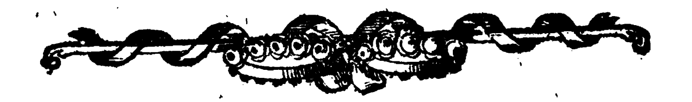
Indeß

Zus. §. 86. Indeß ist man nicht benöthigt, alle Sinusse so mühsam zu bestimmen; denn hat man den Sinus von 10° einmal so genau als möglich berechnet, so kann der Sinus von 80° als sein Kosinus ungemein leichter durch die Formel $cos = \sqrt{1 - sin^2}$ gefunden werden. Will man ferner den Sinus von 20° oder 30° u. s. f. so lasse man den eben gefundnen als den Sinus des einfachen Bogen gelten, und substituiere in der allgemeinen Formel für n die Zahl 2, so verwandelt sich die ganze Reihe in den simpeln Ausdruck $2\,c^{2-1}s = 2\,c\,s$; weil in allen nachfolgenden Gliedern der Faktor $n - 2$ das ist $2 - 2 = 0$ vorkömmt, folglich alle verschwinden müssen.

Eben so ist begreiflich, daß, wenn beym 3fachen Bogen für n die Zahl 3 substituiert wird, alle jene Glieder wieder wegfallen, wo sich der Faktor $n - 3 = 3 - 3 = 0$ einfindet. Es ist auch zugleich aus diesen Verfahren ersichtlich, wie inzwischen auf eine eben so compendiöse Art die allgemeine Formel für Kosinusse nfacher Bögen genutzt werden könne.



Prak-



Praktische Geometrie.

§. 1. Erklärung.

Sie ist die Fertigkeit, von den Sätzen der Geometrie, auf dem Felde, das ist, bey wirklichen Vermessungen, Gebrauch zu machen.

§. 2. Anmerk. Die Werkzeuge, welche man hiezu nöthig hat, lernt man weit leichter durch ihre wirkliche Vorzeigung kennen, als durch weitläuftige, unbefriedigende Beschreibungen und kostspielige Kupfer, welche dieß Werkchen unnöthig vergrößern, und den Preis desselben erhöhen würden. Ich werde mich also hier mit Erklärungen derselben nicht aufhalten, sondern die Kenntniße der gewöhnlichsten Instrumente, als des Meßtischchens, der Dioptern, des Astrolabiums, des Transportärs u. d. gl. voraussetzen.

§. 3. Zusatz. Weil sich aus zureichenden Linien und Winkeln alle geometrischen Größen bestimmen lassen, so hat man auf dem Felde nichts weiter nöthig, als Linien und Winkel zu messen.

§. 4. Erklär. Eine Fläche in der Natur verjüngen, oder aufnehmen, heißt dieselbe etlichemal beträchtlich kleiner machen, und doch ihre Figur beybehalten. Wenn also z. B. die Linien einer Gegend, einer Revier, die aufgenommen wird, 4000mal kleiner gemacht werden, als sie wirklich

 sind,

sind, so wird die Fläche, wozu sie gehören, 16 millionenmal kleiner als die Gegend in der Natur; weil sich ähnliche Flächen verhalten, wie die Quadrate ähnlich liegender Linien.

§. 5. Zusatz. Einige Linien kann man auf dem Felde durch Stangen, Schnüre oder Ketten, die eine gewisse Länge von etlichen Schuhen haben, unmittelbar messen, andere hingegen müssen erst durch Hilfe gemeßner Linien gefunden werden; ja oft wäre bey einer Linie dieß Geschäft überflüßig, da sie sich schon aus andern bekannten Linien und Winkeln bestimmen läßt.

§. 6. Anmerk. Stangen vom Holze haben die Unbequemlichkeit, daß sie bey langen Linien allzu oft angeschlagen werden müßen, und daß die Richtung aller Stangenlagen selten gerade ausfällt. Auf die Schnüre hat die nasse und trockne Witterung allzu beträchtlichen Einfluß, indem sie im ersten Falle merklich verkürzt werden. Folglich bleiben Ketten, wovon jedes Glied einen landüblichen Schuh mißt, und aus 100 solchen Gliedern besteht, das dienlichste Meßwerkzeug.

§. 7. Aufgabe. Eine gerade Linie auf dem Felde zwischen zween Punkten abzustecken, von deren einem man zum andern sehen und gehen kann.

Auflösung. Man stecke in diese Endpunkte Meßfahnen senkrecht in die Erde ein; lasse die Kette von einer dieser Fahne so lange gegen die andere fortziehen, bis das letzte Glied an die erste gehalten werden kann; bringe dann das Aug hinter dieser Fahne in eine solche Lage, daß die letzte Meßfahne von dieser bedeckt werde, und lenke den Kettenzieher durch rechts und links Winken so lange, bis auch sein in die Erde gesenkter Stab zugleich mit der letzten Fahne bedeckt werde. Wird nun dieß nach

jeden

jedem Kettenzug wiederhollt, so ist am Ende die gerade Linie abgesteckt.

Der Beweis dieser Verfahrungsart gründet sich auf die Lehre der Optik, wo erwiesen wird, daß jeder Sehstrahl in gerader Linie fortgepflanzt werde: da nun zwischen den beyden Meßfahnen eigentlich nur eine gerade Linie möglich ist, so werden alle Punkte der Absteckstäbe in der nämlichen geraden Linie liegen; weil durch selbe kein einziger Nebenstrahl des Auges verhindert wird; folglich können sie sich in keiner andern, als obbemeldter Linie befinden.

§. 8. **Zusatz.** Sind die beyden Endpunkte der Linie weiter von einander entfernt, als daß einer aus dem andern bequem gesehen werden kann, so mag zwischen ihnen noch eine solche Meßfahne in die Erde gesenkt werden; geht dieß auch nicht wohl an, z. B. durch Wälder, so muß zu andern Kunstgriffen, als zur Boussole (Magnetnadel) u. d. gl. die Zuflucht genommen werden.

§ 9. **Aufgabe.** Einen rechten Winkel auf dem Felde durch Hilfe der Meßkette zu schlagen, oder, was auf eines hinausläuft, einen Perpendikel auf irgend einer Linie zu errichten.

Auflösung. Es ist aus dem pythagorischen Lehrsatze bekannt, daß drey Seiten, deren eine 3, die andere 4, und die dritte 5 Schuh hält, oder (doppelt genommen) von 6, 8 und 10 Schuhen, ein rechtwinklichtes Dreyeck bilden; wenn demnach 18 Schuhe von der Kette angezogen werden, ohne die Lage der Kettenrichtung, worauf man den Perpendikel fällen soll, zu verändern, wie z. B. Fig. 147 die Richtung nach der Linie a b, und befestiget das End

dieses Kettenstückes 6 Schuhe rückwärts, wie hier in c, spanet dann den zehnten Kettenring so lange an, bis es ein Dreyeck giebt, so wird die Linie b d perpendikulär auf a b seyn; weil es unmöglich ist, auf diese Art ein anders, als ein rechtwinklichtes Dreyeck zu errichten.

§. 10. **Aufgabe.** Eine gerade Linie durch Hindernisse, wie z. B. einer kleinen Grube, Pfütze, Dickicht, Weiher, Rinnsalbeugung eines Flußes, u. d. gl. durchzumessen oder abzustecken.

Auflösung. Es soll Fig. 48 die Linie a b gemessen werden. Setzen wir, es sey in y eine solche Pfütze, so messe man vom ersten Endpunkte aus, bis an das Hinderniß, d. i. bis c; hier werde ein rechter Winkel nach §. 9 geschlagen, und die Kette so lange in gerader Richtung fortgezogen, bis wieder bey d unter einen andern rechten Winkel fortgemessen werden kann. Sieht man endlich bey f, daß sich ein Perpendikel auf die wahre Linie fällen läßt, so schlage man mehrmals in f und dann in g rechte Winkel, so wird man in der vorigen Richtung, und f d = g c seyn. Denn wegen rechten Winkeln ist f d parallel mit g c, und c d mit g f; da nun Paralleln zwischen Paralleln gleich sind, so ist f d = g c, was zu erweisen war.

Von Weitenmessungen.

§. 11. **Eintheilung.** Es giebt in allem dreyerley Weiten zu bestimmen, welche sich unmittelbar nicht wohl messen lassen.

I Wenn

I Wenn man zwar von einem Orte zum andern nicht kommen kann, wohl aber von einem dritten willkührlich gewählten Orte zu allen beyden.

II Wenn zwey Oerter so liegen, daß man aus einen willkührlich gewählten Orte zu einem von beyden gelangen kann.

III Wenn zwey Oerter durchaus unzugänglich sind, oder wenigst dafür angenommen werden.

§. 12. **Aufgabe.** Es soll eine Weite von der ersten Art 1) ohne Meßtisch, 2) mit Meßtisch geometrisch, 3) trigonometrisch gemessen werden.

Erste Auflösung. Es seyen x und y die Oerter, deren Entfernung bestimmt werden soll. Man suche demnach einen dritten Ort c, woraus man zu beyden Oertern sehen und in gerader Linie gehen kann, messe mit der Kette wirklich überall hin, nämlich von c nach x und y und trage diese Distanzen auch rückwärts im nämlichen Maaße und Richtung, so werden die Endpunkte a und b gerade so weit von einander entfernt seyn, als x und y. Fig. 149.

Beweis.

$cb = cx$ } aus deren Bedingung.
$ca = cy$ }
$m = o$ als Vertikalw.
also $\triangle\, acb \cong \triangle\, cxy$
folglich $ab = xy$

§. 13. **Zusatz.** Verstattet es der Platz nicht, die ganzen Linien zurück zu tragen, oder man will sich das Geschäft erleichtern, so dörfen nur die Hälften genommen werden, und diese Abschnittspunkte, sie

mögen

mögen rückwärts oder vorwärts geschehen, um die Hälfte der gesuchten Weite von einander entfernt seyn; denn weil sich die Ganzen wie die Hälften verhalten, so ist

$$ca : cb = dc : cf$$

folglich ist nach §. 143 Geom. df parallel mit ab. Daher

auch $cd : ca = df : ab$

aber $cd = \frac{1}{2} ca$

substit. $\frac{1}{2} ca : ca = df : ab$

$: ca$ $\frac{1}{2} : 1 = df : ab$

$\frac{1}{2} ab = df$

und weil $ab = xy$

so ist auch $\frac{1}{2} xy = df.$

§. 14. **Zusatz.** Der nämliche Beweis gilt auch von der Linie kh, wenn die Abschnitte vorwärts geschehen. Ueberhaupt darf man nur beyderseits gleiche aliquote Theile vom Scheitelpunkte c aus abschneiden, so erhält man auch einen solchen aliquoten Theil der zu bestimmenden Weite; das ist, nimmt man Drittheile, so ergiebt sich auch der dritte Theil der gesuchten Distanz u. s. f.

Zwote Auflösung. Man suche sich zu Stellung des Meßtisches einen solchen Standpunkt, wo man sowohl zu beyden Oertern sehen, als auch in gerader Linie vom Tische weg, dahin messen kann, visiere durch die Dioptern nach einem der beyden Oerter, und ziehe mit einem feinen Bleystift eine Linie von unbestimmter Länge an dem Lineal der Dioptern auf das Meßtischchen. Das nämliche bewerkstellige man auch beym zweyten Orte, doch so, daß die beyden Linien miteinander einen Winkel bilden, lasse die entsprechenden Linien des Feldes wirklich messen, und schneide sie aus dem Scheitelpunkt

im

im verjüngten Maase, z. B. 4000 mal kleiner ab, so wirft die Entfernung der beyden Abschnittspunkte nach verjüngtem Maasstabe das nämliche aus, was die zu suchende Weite in wahren Schuhen oder Ruthen hält. Der Beweis hat viel Aehnlichkeit mit dem vorigen; denn es sey Fig. 150 $ac = \frac{cx}{4000}$

und $cb = \frac{cy}{4000}$, so ist der

Satz

$$ab = \frac{xy}{4000}$$

Beweis.

$$cx : cy = cx : cy \qquad :4000$$
$$= \frac{cx}{4000} : \frac{cy}{4000}$$

In der Fig. $cx : cy = ac : cb$

Folglich ist wieder ab parallel mit xy

Daher auch $ac : cx = ab : xy$

substit. $\frac{cx}{4000} : cx = ab : xy$

$:cx \quad \frac{1}{4000} : 1 = ab : xy$

und $ab = \frac{xy}{4000}$

§ 15. Anmerk. Daß statt 4000 allgemein m oder ein anderer Buchstab gesetzt werden könne, braucht eben nicht zu erinnern. Mir schien die Sache so für Anfänger sinnlicher zu werden.

Dritte Auflösung. Man ist hier nichts benöthigt, als einer Winkelscheibe, um an einem Standpunkte, der die obigen Eigenschaften haben muß, den Winkel in Graden, und wenn es seyn kann, auch

in

in Minuten u. s. f. zu bestimmen, welchen die beyden Linien, die ebenfalls wie vorher mit der Kette gemessen werden müssen, mit einander machen. Man hat dann den Fall in der Trigonometrie, wo zwo Seiten und der dazwischen liegende Winkel bekannt sind, woraus sich nach dortiger Anweisung §. 57 leicht das übrige durch Hilfe der Logarithmen finden läßt.

§. 16. **Zusatz.** Sind die zwey Oerter, deren Distanz bestimmt werden soll, von der Beschaffenheit, daß man von einem zum andern sehen kann, so mag man auch von einem Orte an eine Standlinie annehmen, und aus den Endpunkten nach den Oertern visieren, um die beyden Winkel zu messen, welche an der Standlinie anliegen. Hat man nun die Länge der Standlinie durch die Kette bestimmt, so tritt der trigonometrische Fall ein, wo zwo Seiten und alle Winkel bekannt sind; weil der dritte Winkel das arithmetische Komplement zu 180° ist.

§. 17. **Aufgabe. Eine Weite von der zwoten Art durch die nämliche dreyfache Methode zu messen.**

Erste Auflösung, ohne Meßtisch. Man suche, Fig. 151 in einiger Entfernung von dem zugänglichen Orte, einen Punkt, der mit den beyden Oertern in gerader Linie steht, z. B. a wo nämlich ein Ort das andere deckt. Von diesem Punkte messe man durch die Kette eine Linie von beliebiger Länge rechts oder links hinweg, wie es die Umstände der Gegend erlauben; hier von a nach c, und trage diese Linie im gleichem Maase und Richtung noch weiter fort, d. i. mache ac = cb. Ferner messe man

vom

vom zugänglichen Objekte gleichfalls bis an den Halbierungspunkt der vorigen Linie, und trage eben so auch diese Distanz in ihrer Richtung fort, wie hier von y nach c, wo nachher $cy = cd$ geworden. Es müssen aber auf dem Felde alle diese Punkte theils durch Absteckstäbe oder theils auch durch Meßfahnen, welche man perpendikular in die Erde senkt, sichtbar gemacht werden. Endlich suche man den Punkt der sowohl mit den beyden Endpunkten der verdoppelten Linien, als mit dem Halbierungspunkt und dem unzugänglichen Objekte in gerader Linie steht. Dieß kann auf dem Felde wieder daraus abgenommen werden, wenn die Absteckstäbe in jeder Richtung dem Auge sich decken. In unsrer Figur stellt diesen Punkt das f vor; weil er sowohl mit b und d, als mit c und x in einer Linie liegt. Die Linie nun vom Endpunkte der letzten Doppellinie bis dahin, nämlich df ist die Entfernung des zugänglichen Objekts vom unzugänglichen.

Satz

$$df = xy$$

Beweis.

$ac = cb$ ⎤ Aus der Bedingung
$yc = cd$ ⎦
$o = m$ als Vertikalw.
Also $\Delta\, acy \cong \Delta\, cbd$: Folglich
$s = r$ und als Komplement zu 180°
$n = z$ Da nun ohnehin
$yc = cd$ und
$\phi = \lambda$ so muß auch
$\Delta\, cxy = \Delta\, cdf$ seyn. Und eben darum
auch $xy = df$. §. 18.

§. 18. Anmerk. Geht der Vortheil an, daß sich Fig. 152 irgend bey einem der beyden Objekte, wie bey y ein rechter Winkel schlagen, und der Perpendikel y c fortmessen läßt, so errichte man unterhalb an einem gelegnen Orte in b einen andern Perpendikel auf die Linie y c von beliebiger Länge, senke im Endpunkt a einen Absteckstab, und gehe so lange gegen c fort bis ein dritter Absteckstab sowohl die Objekte b und y, als a und x deckt. Weil nun c b, a b und c y gemessen werden kann, und a b mit x y wegen rechten Winkeln parallel läuft, so ist nach §. 143 Nro IV Geom.

	c b : a b	=	c y : x y
Gesetzt es wäre	c b	=	20
	a b	=	15
	c y	=	44
so ist	20 : 15	=	44 : x y
oder abgek.	4 : 3	=	44 : x y
nochmal	1 : 3	=	11 : x y
und	x y	=	33

Zweyte Auflösung, (mit dem Meßtische). Man messe sich vom zugänglichem Orte aus eine Standlinie, stelle auf dem Endpunkte a Fig. 153 das Meßtischchen, visiere nach beyden Orten und schneide die gemeßne Standlinie im verjüngten Maase a c von der Richtungslinie a y ab. Uebertrage nun, sobald eine Meßfahne eingesenkt worden, den Tisch nach dem zugänglichen Orte y und drehe ihn so lange, bis man durch die Diopteren, deren Lineal an der abgeschnittnen verjüngten Linie anliegt, die Meßfahne erblickt, lasse den Tisch unverrückt stehen, und visiere aus dem Abschnittspunkte nach dem unzugänglichen Objekte, so wird die Schlußlinie des Dreyecks auf dem Tische die Entfernung der beyden Oerter im verjüngten Maase sein.

Beweis. Denn das Dreyeck auf dem Tischchen und das auf dem Felde, welches die Visierlinien bestimmen, sind wegen Gleichheit der Winkel einander ähnlich; also stehen die gleichnamigen Seiten im Verhältniße. Setzen wir nun, es sey eine von den

Seiten des verjüngten Dreyecks 4000 mal kleiner, als die gleichnamige des Felddreyecks, so muß es auch die andere seyn; da aber die Schlußseite mit der Entfernung der beyden Oerter gleichnamig ist, so muß sie auch 4000 mal kleiner, als dieselbe seyn; folglich wirst sie die Entfernung der Oerter in verjüngtem Maase aus, das was zu erweisen war.

Dritte Auflösung, (trigonometrisch) Es lassen sich durch die Winkelscheibe füglich an den Endpunkten der nach voriger geometrischer Art willkührlich angenommenen Standlinie die Winkel messen, folglich ist auch der dritte Winkel bekannt. Man kann nun gar leicht folgern: Die Seiten verhalten sich wie die Sinusse der opponierten Winkel. Nehmen wir an, es sey in der vorigen Figur

$$ay = 62'$$
$$a = 51°12'$$
$$y = 80°,29'$$

so ist $x = 180° - 51°12' - 80°29'$
$= 180 - 131°41' = 48°19'$

Da nun der Winkel x der gemessenen Seite a y; und der Winkel a der unbekannten Entfernung x y übersteht oder opponiert ist, so hat die Proportion statt.

$$\sin x : ay = \sin a : xy$$

oder $\sin 48°19' : 62' = \sin 51°,29 : xy$

Logarithmisch berechnet

Log. 62 = 1,7923917
Log. sin 51°29' = 9,8905026
11,6828943
Log. sin 48°19' = 9,8710735
1,8118208 Log x y

denn die Zahl 66' am nächsten entspricht, welche die Entfernung der beyden Oerter ausdrückt.

§. 19.

§. 19. Aufgabe. Eine Weite von der dritten Gattung auf dreyerley Art zu messen.

§. 20. Anmerk. Da die Ausmessung dieses Falles ohne Meßtisch gar zu vielen Schwierigkeiten und Fehlern auch bey der grösten Akuratesse ausgesetzt ist, so wollen wir lieber davon schweigen, und statt dessen nützlichere Säze anführen.

Zwote Auflösung. Man wähle Fig. 154 eine Standlinie a b, von deren Endpunkte sich zu beyden Orten visieren läßt. Stelle das Tischchen in a, visiere nach x, b und y, zeige die Richtungen durch unbestimmte Linien aus dem nämlichen Punkte an, lasse a b messen, und schneide sie im verjüngten Maase aus a ab. Man übersetze den Meßtisch nach b, und drehe ihn so, daß wenn nach a visiert wird, das Dioptenlineal dicht an der abgeschnittenen Richtungslinie fortläuft. Man visiere mehrmal aus b nach x und y, ziehe diese Linien wirklich so lange, bis gegen x und y Durchschnitte erfolgen. Die Entfernung dieser Durchschnittspunkte ist die verjüngte Entfernung der Objekte auf dem Felde.

Beweis.

Da eine Seite und die darauf liegenden beyden Winkel ein Dreyeck völlig bestimmen, so sind eben darum auch die △ △ a b x und a b y bestimmt, welche jenen auf dem Felde wegen Gleichheit der Winkel ähnlich sind. Da ferner die Grundlinie a b worauf sie stehen, die nämliche ist, und eben so wenig als die darauf liegenden Winkel geändert werden kann, so bleibt auch die Lage ihrer Spize unveränderlich und steht, weil alles ähnlich ist, mit der Entfernung der beyden unzugänglichen Seiten im Verhältniße; weil sie gerade das im Kleinen vorstellt, was die Felddreyecke im Großen sind.

Dritte

Dritte Auflösung. (trigonometrisch) Es wird hier mehrmals eine bequeme Standlinie erfodert, so wie in der vorigen geometrischen Auflösung. Man zeichne sich irgend auf einem Papiere beyläufig die Stellung der obigen Dreyecke, die die Visierlinien des Winkelinstruments bestimmen, schreibe die gemeßnen Winkel m, n, s und o sonderheitlich auf, so gilt erstens, weil die Winkel bey x und y als Komplemente ebenfalls bekannt sind, in dem Δ axb die Proportion

$$\sin x : ab = \sin s : ax$$

Ist nun die Linie ax gefunden, so ist zweytens in dem Δ ayb

$$\sin y : ab = \sin (o + s) : ay$$

Wenn auch dieses ay bestimmt worden, so hat man ferner in dem Δ xya den Fall, wo zwo Seiten nämlich ax und ay nebst den dazwischenliegenden Winkel m bekannt ist; daher drittens nach §. 57 Trig.

$$(ay + ax) : (ay - ax) = \text{Tang}\left(\frac{(x + v) + r}{2}\right) : \text{Tang}\left(\frac{(x + v) - r}{2}\right)$$

Nach gehöriger Berechnung der Winkel v und r ist es endlich gar leicht entweder aus dem Δ axy oder Δ bxy die Seite xy zu folgern; denn man setze im ersten Falle z. B. die Proportion an

$$\sin r : ax = \sin m : xy$$

§. 21. **Anmerk.** So mühsam und weitläufig auch diese trigonometrische Meßmethode zu seyn scheint; so sehr lohnt es doch der Mühe, selbe der geometrischen Art, besonders bey beträchlichen Weiten, wegen ihrer ungleich größern Genauigkeit vorzuziehen; vorausgesetzt, daß man mit Winkelmessern versehen sey, welche auch neben den Graden die Minuten, oder gar noch die Sekunden angeben. Daß dazu auch Tafeln gehören, wo dergleichen Sinusse und Tangenten mit Sekunden

den nachgeschlagen werden können, versteht sich von selbst. Es ist dazu Johann Carl Schulze neue und erweiterte Sammlung logarithmischer, trigonometrischer u. a. Tafeln, zween Bände, Berlin 1778 wegen ganz besonderer Brauchbarkeit zu empfehlen; indem selbe durchgehends nach der so kostbaren Sherwinschen Ausgabe der Mathematical Tables veranstaltet worden.

Von Höhenmessungen.

§. 22. **Eintheilung.** Höhen können entweder von Natur aus unzugänglich seyn, wie die Perpendikel der Berge auf die runde Oberfläche der Erde; oder zugänglich, wie Bäume, Thürme, u. d. gl.; oder sie verlangen wegen andern Umständen aus der Ferne gemessen zu werden, wie z. B. wegen unebnen Zugängen, allzugroßen Entfernungen u. s. w.

§. 23. **Aufgabe.** Eine zugängliche Höhe, z. B. einen Baum, 1) Ohne Meßinstrument, 2) mit Meßinstrument (geometrisch) 3) trigonometrisch zu bestimmen.

Erste Auflösung. Dieß kann so wohl durch Hilfe zweener Stäbe, als durch den Schatten geschehen.

I **Durch Hilfe zweener Stäbe.** Man nehme Fig. 155 zween Stäbe, deren einer a b 5 Schuh, und der andere d f (wir wollen setzen) 8 Schuh hoch ist, senke diesen letztern in einiger Entfernung vom Baume perpendikulär in die Erde, so daß er außerhalb noch immer 8 Schuh mißt (folglich muß seine Länge um so viel größer seyn, als nöthig ist, ihn in der Erde befestigen zu können) dann gehe man mit dem erstern Stabe a b so weit zurücke, bis das auf dem Endpunkte a aufgesetzte Aug den Endpunkt d des andern Stabes und den Wipfel des Baumes

in

in einer Linie erblickt — es versteht sich, daß auch der Stab a b perpendikulär gehalten werden müsse, — so entsteht, wenn die Entfernung der Stäbe von einander, und die Entfernung des kürzern Stabes vom Baume selbst gemessen worden, weil d c mit h y parallel läuft, nach §. 143 Nro IV Geom. folgende Proportion $ac : dc = ah : hy$. Da aber wegen Parallelismus $ac = fb$, und $ah = bx$; ferner $dc = df - cf$, und weil mehrmal $cf = ab$ folglich $dc = df - ab$ und endlich $ah = bx$ ist so kann substituiert werden. Also $fb : (df - ab) = bx : hy$. In Worten ausgedrückt heißt demnach die Proportion so: **Die Distanz der Stäbe von einander verhält sich zu ihrer Längendifferenz: wie der Abstand des kleinern Stabs vom Baume, zur Höhe des Baumes selbst**, wozu aber noch am Ende 5 Schuh addiert werden müssen; weil die ganze Höhe des Baums $= hy + hx$ und $hx = ab$ ist. Setzen wir der grössere Stab halte 8 Schuh, sie stehen 10 Schuh von einander, und der 5 Fuß hohe Stab sey 150 Schuh vom Baum entfernt; so ist

$$10 : 3 = 150 : z$$
$$10z = 450$$
$$z = 45,$$ und $45 + 5 = 50$ der Höhe des Baumes.

§. 24. **Anmerk.** Auf diese Methode gründet sich die Einrichtung des sogenannten Dendrometers (Baummesser) welchen Hr. Prof Jung in seinem Lehrbuche, und nach ihm Hr. Prof. Grünberger in dem Lehrbuche für churpfalzbaierische Förster §. 229 I Th. beschrieben hat.

II **Durch den Schatten.** Man senke beym Sonnenschein einen Stab von gewisser Länge perpendikulär in die Erde, und messe sowohl den Schatten des Stabes, als den des Baumes oder Thurmes

auf

auf einer Horizontalebne zur nämlichen Zeit, so kann man folgern: Wie sich der Schatten des Stabes zum Stabe selbst verhält; so verhält sich ebenfalls auch der Schatten des Baums zum Baume selbst. Denn der Schatten bildet zwischen dem Baum oder Thurme, zwischen der Horizontallinie und zwischen der Lichtgränze ein rechtwinklichtes Dreyeck. Weil nun alle Perpendikulärobjekte, wegen der allzugroßen Entfernung des leuchtenden Körpers zur nämlichen Zeit einen gleichen Winkel mit dem letzten aufstiegenden Sonnenstrahl machen, so sind sich diese Schattendreyecke ähnlich; folglich stehen die gleichnamigen Seiten im Verhältniße, welches in unsern Falle die Horizontallinien, in so weit sie der Schatten begränzt, und die Höhenobjekte selbst sind. Um dießmal nicht ohne Beyspiel zu bleiben, so sey der Stab außerhalb der Erde 9 Schuh hoch, und werfe einen Schatten von $7\frac{1}{2}$ Schuhe; zur nämlichen Zeit messe der Schatten des Thurms $83\frac{1}{4}$ Schuh, so ist demnach

$$7\tfrac{1}{2} : 9 = 83\tfrac{1}{4} : x$$
$$\frac{15}{2} : 9 = \frac{333}{4} : x$$
$$\frac{15x}{2} = \frac{2997}{4}$$
$$60x = 5994$$
$$x = 99\tfrac{9}{10} \text{ Schuh}$$

§. 25. **Anmerk.** Es giebt noch zwo Arten, Höhen ohne Meßinstrument zu bestimmen. Z. B. bey Thürmen oder auch beträchtlichen Vertiefungen, als Brünnen, unterirdischen Höhlen u. d. gl. durch den freyen Fall eines schweren Körpers, wie etwa eines Steins oder einer Bleykugel. Läßt sich aber bey Höhen, die man besteigen kann, kein Perpendikulärfall anbringen, so thut das Barometer treffliche Dienste, ihre Größe so ziemlich genau ausfindig zu machen. Wir wollen die praktische Verfahrungsart beyder Methoden am gehörigen Orte hier einrücken.

Erstens

Erstens. Durch den freyen Körperfall.

Es ist aus der Physik bekannt, daß in unsrer Atmosphäre die Körper der schwerern Art, während des freyen Falles, in der ersten Sekunde 15,6 rheinländische Schuhe, in der zwoten 45,6, in der dritten 75,6 u. s. f. durchlaufen: daß überhaupt, wenn S den Raum (Spatium) T die Zeit (Tempus) und g die Zahl 15,6 bedeutet, gemäß der Progreßionslehre $S = g\,T^2$ sey. Ist daher die Zeit nach Sekundenuhren, oder noch besser, nach Tertienuhren, dergleichen man zu Göttingen auf dem Observatorium hat, während des Falls beobachtet worden, so kann der Raum (das ist, z. B. die Tiefe des Brunnens) leicht nach der Formel berechnet werden. — Nehmen wir an, einen Stein, der in eine unterirdische Vertiefung geworfen worden, habe man erst nach $4\frac{1}{4}$ Sekunden fallen gehört; wie groß ist diese Tiefe?

Wenn der Fall des Steins in dem nämlichen Augenblicke gehört würde, in welchem er wirklich geschehen ist, so hätte man weiter nichts zu thun, als nach obigem allgemeinen Ausdrucke das Quadrat der Zeit $4\frac{1}{4}$ mit 15,6 zu multiplicieren. Allein es ist mehrmal aus der Physik bekannt, daß der Schall in jeder Sekunde 1040 Pariserfüsse oder 1076 rheinländische Schuhe durchläuft; folglich ist in der Zeit $4\frac{1}{4}$ Sekunden auch jene mit begriffen, die der Schall des Steines brauchte, bis er durch die Tiefe herauf kam. Nenne man deßwegen die unbekannte Schuhenanzahl der Tiefe = x, und bestimme allgemein die Zeit, welche der Schall gebraucht, durch folgende Proportion

$$1076 \text{ Sch.} : 1 \text{ Sek.} = x : \frac{x}{1076},$$

und ziehe den gefundnen Werth von $4\frac{1}{4}$ Sekunden ab, so bleibt die wahre Zeit für den Fall. Folglich $T = 4\frac{1}{4} - \frac{x}{1076}$ Dieß nun in der Gleichung $S = g\,T^2$ substituiert, giebt

$$x = 15{,}6 \times \left(4\frac{1}{4} - \frac{x}{1076}\right)^2$$

Um die Sache noch allgemeiner zu machen, wollen wir einstweilen für $1076 = a$, $15{,}6 = b$ und $4\frac{1}{4} = c$ setzen, so entsteht die Gleichung

$$x = b\left(c - \frac{x}{a}\right)^2 \quad \text{Nun fortkalkuliert}$$

$$x = b\left(c^2 - \frac{2cx}{a} + \frac{x^2}{a2}\right)$$

$$x = bc^2 - \frac{2bcx}{a} + \frac{bx^2}{a^2}$$

$$a^2 x \quad -bc^2 = \frac{bx^2}{a^2} - \frac{2bcx}{a} - x$$

$$-a^2bc^2 = bx^2 - 2abcx - a^2x$$

$$b: \quad -a^2c^2 = x^2 - 2acx - \frac{a^2x}{b}$$

$$-a^2c^2 = x^2 - \left(2ac + \frac{a^2}{b}\right)x; \text{ kompliert}$$

$$a^2c^2 + \frac{a^3c}{b} + \frac{a^4}{4b^2} = \left(ac + \frac{a^2}{2b}\right)^2$$

$$\frac{a^3c}{b} + \frac{a^4}{4b^2} = x^2 - \left(2ac + \frac{a^2}{b}\right)x + \left(ac + \frac{a^2}{2b}\right)^2$$

$$\frac{4a^3bc + a^4}{4b^2} = x^2 - (2ac,\ \text{\&c.})$$

a^2

$$\frac{a^2}{4b^2}\left(4abc+a^2\right) = x^2 - \left(2ac + \frac{a^2}{b}\right)x + \left(ac+\frac{a^2}{2b}\right)^2$$

$$\pm \frac{a}{2b}\sqrt{4abc+a^2} = x - \left(ac+\frac{a^2}{2b}\right)$$

$$ac + \frac{a^2}{2b} \pm \frac{a}{2b}\sqrt{(4bc+a)a} = x$$

Für den besondern Fall wieder substituiert, so erhält man

$$1076 \times 4\tfrac{1}{4} + \frac{(1076)^2}{2\times 15,6} \pm \frac{1076}{2\times 15,6}\sqrt{(4\times 15,6\times 4\tfrac{1}{4} + 1076)\times 1076} = x$$

$$\frac{1076\times 17}{4} + \frac{1157776}{31,2} \pm \frac{1076}{31,2}\sqrt{(265,2+1076)\times 1076} = x$$

$$4573 + 37108,2 \pm 34,487\sqrt{1341,2\times 1076} = x$$

$$41681,2 \pm 34,487\sqrt{1443131,2} = x$$

$$41681,2 \pm 34,487\times 1201,3 = x$$

$$41681,2 \pm 41429,4 = x$$

$$251,8 = x \text{ die wahre Tiefe.}$$

Hätte man hier auf den Weg des Schalls keine Rücksicht genommen, so wäre die Rechnung nach der Formel $S = gT^2$ folgende gewesen

$$x = 15,6 \times (4\tfrac{1}{4})^2$$

$$x = \frac{15,6\times 289}{16} = \frac{4508,4}{16}$$

$x = 281.$ Und diesemnach würde die Tiefe gegen 30 Schuhe zu groß angesetzt worden seyn.

Zweytens. Durch Hilfe des Barometers.

Man hat aus wiederholten Versuchen wahrgenommen, daß, je höher man mit dem Barometer in die obere Luftgegend hinauf steigt, je mehr das Quecksilber in selbem falle. Ja es ist sogar ein erwiesenes Gesetz: *) daß sich, bey der nämlichen Lufttemperatur, die Höhen über der Horizontalfläche gegen einander verhalten, wie die Logarithmen der Quotusse, welche entstehen, wenn man den Barometerstand der Horizontalfläche durch die Barometerstände dieser Höhen dividiert. Wenn demnach die Höhen = A und a, der Barometerstand auf der Horizontalfläche = b, die andern hingegen = m und M gesetzt werden, so sieht die Proportion so aus

$$a : A = \text{Log } \frac{b}{m} : \text{Log } \frac{b}{M}$$

Nun lege man ferner folgende Erfahrung zum Grunde: Wenn in einer Station, die man für die Horizontalfläche annehmen kann, der Barometerstand 29 Pariserzoll oder 29 × 12 = 348 Linien beträgt, welcher demnach durch b ausgedrückt werden muß, und man sich mit dem Barometer um 12,497 Toisen erhöht, welche Höhe = a gesetzt wird, so sinket das Quecksilber um eine ganze Linie, das heißt, der Barometerstand ist hier 347 Linien = m. Diese Größen nun in obiger Proportion substituiert, so wird sie bald zur näheren Brauchbarkeit geschickt werden.

12,

*) Der strenge Beweis dieses Satzes gehört in die Physik. Er kann indeß mit seiner Vollständigkeit bey Tobias Maier in dessen gründlichem Unterrichte zur praktischen Geometrie nachgesehen werden.

$$12{,}497 : A = \text{Log}\,\frac{348}{347} : \text{Log}\,\frac{348}{M}$$

Da aber $\text{Log}\,\frac{348}{347} = \text{Log}\,348 - \text{Log}\,347 = 0{,}0012497$
ist, und eben so $\text{Log}\,\frac{348}{M} = \text{Log}\,348 - \text{Log}\,M$
so giebt dieß

$$12{,}497 : A = 0{,}0012497 : (\text{Log}\,348 - \text{Log}\,M)$$

$$A = \frac{12{,}497 \times (\text{Log}\,348 - \text{Log}\,M)}{0{,}0012497}$$

$$A = 10000\,(\text{Log}\,348 - \text{Log}\,M)$$

Es läßt sich also durch diese Formel immer berechnen, wie weit zwo Stationen von der angenommenen Horizontalfläche entfernt sind. Zieht man diese Entfernungen von einander ab, so hat man offenbar die Höhe, um welche die beyden Stationen von einander unterschieden sind. Es sey daher

die höhere Station $= x$
dessen Barometerstand $= c$
die kleinere Höhe $= y$
dessen Barometerstand $= d$

so erhält man folgende Rechnung

$$x = 10000\,(\text{Log}\,348 - \text{Log}\,c)$$
$$y = 10000\,(\text{Log}\,348 - \text{Log}\,d)$$

$$x - y = 10000\,(\text{Log}\,348 - \text{Log}\,c - \text{Log}\,348 + \text{Log}\,d)$$
$$x - y = 10000\,(\text{Log}\,d - \text{Log}\,c);$$

und die allgemeine Regel ist bereits auf den simpelsten Ausdruck gebracht. Sie heißt nun so: Man multipliciere die Logarithmendifferenz der Barometerstände an zweyen Orten mit 10000, so zeigt das Produkt die Toisen an, um wie viel ein Ort höher, als das andere liegt. Zu einem Beyspiel dient folgende Aufgabe.

Der

Der Barometerstand auf der mittleren Meereshöhe soll nach meiner Erkundigung 28″6‴ = 342‴; hingegen in Quito 20″ = 240‴ seyn; um wie viel Toisen läge Quito höher als die mittlere Meereshöhe? vorausgesetzt, daß sonst nichts weiter auf das Steigen oder Fallen des Barometers Einfluß gehabt, als die natürliche Abnahme der Luftschwere in der Entfernung von der Horizontalfläche.

Log 342 = 2,5340261
Log 240 = 2,3802112
Differenz = 0,1538149

Diese Differenz mit 10000 multiplicirt

0,1538149
10000
1538,1490000

Folglich läge Quito 1538,149 Toisen höher als die mittlere Meereshöhe.

§. 26. Anmerk. Indeß mag man sich leicht einbilden, daß es manche Umstände geben könne, die eine solche Messung unrichtig machen, z. B. die plötzliche Veränderung des Drucks der Luft in der Atmosphäre, während an beyden Orten die Barometerstände observiert worden; die Wärmegrade, welche das Quecksilber mehr oder weniger ausdehnen u. d. gl. Doch hat man wieder Mittel ausfindig gemacht, wie man auch diese Fehler korrigieren müsse. Herr Hofrath Kästner spricht in seiner Abhandlung, Höhen durch's Barometer zu bestimmen, weitläuftiger darüber. Ferner sind als hieher gehörige Schriften zu empfehlen: De Luc sur les modifications de l'Atmosphaere, Michaeli du Crest's kleine Schriften, vom Therm. und Barom. aus dem Französischen von J. C. Thenn, Augsb. 1770 u. d. gl.

Zwote Auflösung; zugängliche Höhen nämlich durch Hilfe eines Instruments zu bestimmen.

Man wähle sich in einer Entfernung einen Standpunkt, bringe das Blatt des Meßtischchens über

über dem Stativ in eine vertikale Stellung, so, daß ein Rand desselben mit dem Horizonte parallel zu stehen kömmt, welches sich mittels einer Bleywage leicht verrichten läßt, visiere alsdann nach dem Endpunkte des Höhenobjekts, ziehe an der Alhidadenregel oder Diopternlineal eine Linie auf das Tischchen, durchschneide diese Linie wo immer durch eine andere, die mit obbemeldtem Rande parallel läuft, lasse ferner die Entfernung des Tisches von dem Höhenobjekte wirklich messen, und trage sie verjüngt aus dem Durchschnittspunkte auf die Parallelinie, errichte auf dem Endpunkt dieser verjüngten Linie einen Perpendikel, der den Winkel zu einem rechtwinklichten Dreyeck schließt, so ist dieser Perpendikel die Höhe des Objekts im verjüngten Maase, wenn die Höhe des Stativs dazu addiert wird, weil Fig. 156 selbe = a h ist. Der Beweis ist mehrmal, wie §. 17 zweyte Auflös.

§. 27. Anmerk. Es kann der Winkel auch mit einem Astrolabium oder Quartanten gemessen, und dann auf einem Papier durch Hilfe eines geradlinnichten Transportärs über der Entfernung aufgetragen, und das Dreyeck durch einen Perpendikel geschlossen werden, so ist dieser gleichfalls wie oben die verlangte Höhe, weniger dem Stativ. Es wird aber bey diesen Auflösungen durchgehends voraus gesetzt, daß die Ebne mit dem Höhenobjekt einen rechten Winkel formieren.

Dritte Auflösung. (trigonometrisch) Wenn der Winkel sammt der Entfernung gemessen worden, so gilt Fig. 156, weil $x + c = 90$ also $x = 90 - c$, die Proportion

$$\cos c : a c = \sin c : a x$$

Es sey z. B. $c = 38° 19'$

und $a c = 112'$

Folglich $\cos 38° 19' : 112 = \sin 38° 19' : a x$

Loga-

Logarithmisch berechnet

$$\text{Log sin } 38°19 = 9{,}7923968$$
$$\text{Log } 112 = 2{,}0492180$$
$$11{,}8416148$$
$$\text{Log cos } 38°19 = 9{,}8946461$$
$$1{,}9469687 = \text{Log } 88'5''$$

und wenn das Stativ $4\frac{1}{2}$ Schuh hoch ist, so beträgt die ganze Höhe $88{,}5 + 4{,}5 = 93'$

§. 28. **Aufgabe.** Eine unzugängliche Höhe 1) geometrisch 2) trigonometrisch zu erforschen.

Erste Auflösung. (geometrisch) Man wähle sich auf einer Ebne eine Standlinie, von deren Endpunkten man das Höheobjekt erblicken kann, messe die beyden Winkel, die die Visierlinien mit der Standlinie machen, und ihre Entfernung von einander, bringe sie wie oben zu Papier, und ziehe die Schenkel so lange fort, bis sie ein überhängendes Dreyeck schließen. Der Perpendikel davon ist wieder unter vorigen Umständen die verlangte Höhe; welches sich auch eben sowohl auf dem vertikal gestellten Meßtische bewerkstelligen läßt, wie Fig. 157. Der Beweis hievon lauft immer auf das nämliche hinaus, was weiter oben §. 17 zwote Aufl. erwiesen worden.

Zwote Auflösung. (trigonometrisch) Man mache sich auf irgend ein Papier Fig. 158 ein kleines Brouillon (Entwurf), und messe alles wie vorhin, so ergiebt sich folgende Rechnung

Weil o und m gemessen worden, so muß auch s bekannt seyn. Es ist nämlich $s = 180 - o - m$. Man hat demnach die erste Proportion.

$$\text{I sin } s : bc = \text{sin } m : bx$$

Ist

Ist nun b x gefunden, so folgere man in dem rechtwinklichten Nebendreyeck b x y, wo sich n als anliegender Winkel von o bestimmen läßt:

II sin tot. : b x = sin n : x y

Nehmen wir wieder an, es sey

b c = 48′

m = 33° 11′

o = 124° 30′

folgl. s = 180 — 124°, 30′ — 33°, 11 = 180 — 157° 41′ = 22°, 19′

und n = 180 — 124°, 30′ = 55° 30′

so heißt nach der Substitution die erste Proportion

sin 22° 19′ : 48 = sin 33° 11′ : b x

Und in Logarithmen

Log 33° 11′ = 9,7382412
Log 48 = 1,6812412
11,4194824
Log 22° 19′ 9,5794695
1,8400129 Log = b x

Die zweyte Proportion

sin 90° : b x = sin 55° 30′ : x y

Nach den logarithmischen Tafeln behandelt

Log b x = 1,8400129 wie eben gefunden worden.
Log sin 55° 30′ = 9,9159937
11,7560066
Log sin tot = 10,0000000
1,7560066 = Log 57′

Folglich ist die gesuchte Höhe, wenn auch das Stativ in Anschlag gebracht wird

57 + 4½ = 61½ Schuh

§. 29.

§. 29. Zusatz. Macht die Ebne mit dem Höhenobjekt einen schiefen Winkel, z. B. Thürme auf Bergen, so muß sowohl der Berg selbst, als auch der Thurm sammt dem Berge besonders gemessen und die Resultate von einander abgezogen werden, welches dann die wahre Höhe des Thurmes giebt.

Von Aufnehmung der Gegenden.

§. 30. Eintheilung. Gegenden oder Reviere lassen sich sowohl ohne Meßtisch, als mit dem Meßtische (geometrisch) als auch trigonometrisch aufnehmen, wie wohl nicht mit gleicher Akkuratesse und Mühwaltung.

§. 31. Aufgabe. Ein Feld, Wiese, Garten oder anders kleine Bezirk ohne Meßtisch aufzunehmen.

Auflösung. Formiert eine aufzunehmende Fläche genau ein Dreyeck oder Parallelogram, so ist freylich nichts leichters, als eine solche Figur nach verjüngtem Maßstabe in Grund zu legen: hat sie aber die Form eines Trapezes (auch dieß ist nicht schwer) oder eines irregulären Vielecks, dann fodert das Geschäft mehr Weitläuftigkeit. — Ferner entsteht noch die Frage, ob man diese Fläche durchgehen kann oder nicht. Im ersten Fall werden alle Seiten sammt den Diagonalen gemessen, und diese Dreyecke auf dem Papier gerade so im verjüngten Maase durch Hilfe des Zirkels auf einander gesetzt, wie man sich selbe auf dem Felde im Großen mittels dieser Diagonale vorstellen muß. Läßt sich die Revier nicht durchgehen, wie Pfützen, Seen, auch dichte Wälder u. d. gl. so müssen die Seiten von außen gemessen, und die Winkel auf folgende Art

bestimmt

bestimmt werden. Man verlängere die Schenkel der Winkel rückwärts nach Verstattung der Gegend um 10, 20 oder 30 Schuhe, und messe die Entfernung der Endpunkte, so werden diese kleinen Dreyecke Fig. 159 abc, dfg, wenn man sie auf dem Papiere sammt der dazu gehörigen Seite verjüngt aufträgt die Vertikalwinkel vollkommen bestimmen; und wenn dieß mit allen Winkeln geschieht, so muß sich das Polygon bey der letzten Seite ka von selbst schliessen.

Giebt es in der Figur gar zu viele Ecke und Krümmungen, so ist es besser, man beschreibt selbst ein willkührliches Viereck oder Polygon darum, wie Fig. 160, und mißt auf die vornehmsten Beugungen Perpendikel hinein, als ab, cd u. s. f. Gut wird es seyn, davon ein Brouillon in Handen zu haben, damit man sich zu Hause, wenn all dieß im verjüngten Maase zu Papier nachgemacht wird, die Lage noch beyläufig vorstellen kann.

§. 32. **Aufgabe.** Eine Revier durch Hilfe des Meßtisches aufzunehmen.

Auflösung. Wenn man in sie hinein kommen, und darinn ein oder mehrere Standpunkte ausfindig machen kann, von wo aus sich die ganze Gegend übersehen läßt, vorzüglich aber die Winkelpunkte, die durch Meßfahnen und Absteckstäbe müssen sichtbar gemacht werden, so stelle man (wir wollen dießmal nur einen Standpunkt annehmen) den Meßtisch dahin, ziehe allerërstens mittels der Bousolle eine Mittagslinie, damit der Plan auch die Lage der Revier gegen die vier Weltgegenden anzeigt, und visiere nach allen Winkelpunkten, ziehe unbestimmte Linien dahin; lasse alle diese Visierlinien messen und

schneide

schneide sie verjüngt aus ihrem Mittelpunkt ab. Werden nun diese Abschnittspunkte durch Linien verbunden, so ist der Plan fertig.

Beweis.

Denn die Dreyecke Fig. 161 oab und oAB, ob und oBC sind alle ähnlich, wegen den gemeinschaftlichen Winkeln bey o und den z. B. 4000 mal kleineren Seiten, folglich ist auch wegen Aehnlichkeit der Theile das Ganze selbst einander ähnlich.

§. 33. Zusatz. Läßt sich die aufzunehmende Gegend nur umgehen, so stelle man den Meßtisch auf einen Winkelpunkt derselben, visiere nach den zween nächsten Winkeln, und trage die gemessenen zwo Seiten auf. Mit diesen verfüge man sich zu einem der nächsten Winkel, und stelle den Meßtisch so, daß, wenn das Diopternlineal an der gehörigen verjüngten Seite liegt, sich nach jenen Winkel visieren läßt, der gerade vorher aufgetragen worden; drehe dann das Diopternlineal um, und visiere nach dem nächstfolgenden Winkel, verjünge die zwischenliegende Seite, und fahre so fort, bis man ganz herumgekommen, so wird sich das Polygon bey der letzten Seite, wenn recht gemessen worden, vollkommen schließen.

§. 34. Aufgabe. Eine Gegend trigonometrisch aufzunehmen.

Auflösung. Man gehe zuerst durch oder um das Revier, zeichne sich davon ein Brouillon, zerfälle selbes auf die geschickteste und thunlichste Art in Dreyecke, messe die benöthigten Winkel und Seiten, und bringe das trigonometrisch Berechnete allemal

sogleich

sogleich wieder zu Papier, so wird man am Ende erhalten, was man wollte.

§. 34. Anmerk. Weitläuftigere Anweisungen zur praktischen Geometrie verstattet der Raum dieses Werkchens nicht. Wer Lust hat, sich hierinnfalls mehr umzusehen, kann oben erwähntes treffliches Werk von Tobias Mayr benutzen, so auch Vollimhaus, Helfenzrieders Geodäsie, Unterberger u. a. d. gl.

Ueber die Reduzierung der in verschiedenen Ländern üblichen Schuhen oder Füße.

Der Pariserfuß ist so zu reden die Basis der übrigen Fußmaaſe, weil er fast durchgehends unter allen übrigen Landschuhen der gröste ist. Er wird in 14400 gleiche Theile getheilt, und alle andern Füße werden in einer bestimmten Anzahl solcher Theile ausgedrückt. Nimmt man z. B. 13918 Theile davon, so hat man den rheinländischen Fuß. Folglich ist dieser ein Bruch von dem Pariserfuß und heißt $\frac{13918}{14400}$. So geht es auch bey andern Fußmaaſen. Wie viele Theile man aber bey jedem Lande nehmen müsse, enthalten die vorhandnen Tabellen. Ich will hier nur einige der vornehmsten hersetzen.

Amsterdamer	12570
Anspacher	13200
Augsburger	13129
Berliner	13730
Baierischer	12938
Braunschweiger	12650
Breslauer	12600

Brüß-

Brüßler	12900
Kölner	12190
Dänische	14034
Danziger	12751
Frankfurter	12700
Königsberger	13640
Leipziger	12520
Londner	13511,54
Manheimer	12865
Rheinländische	13913
Wiener	14011,7

Man ersieht aus dieser Tabelle, wie sich die Füße anderer Oerter untereinander verhalten. So z. B. zeigt es sich, daß der Amsterdamerfuß 12570 Theile vom Pariserfuße habe; der Berliner hingegen 13730. Weil diese Theile gleich sind, so kann ich mir vorstellen, als wenn der Berlinerschuh in 13730 gleiche Theile getheilt würde; wenn ich nun davon 12570 Theile nehme, so habe ich den Amsterdamerfuß, und es gilt die Gleichung

$$\frac{12570}{13730} \text{ Berlinersch.} = 1 \text{ Amsterdamersch.}$$

Da bekannt ist, daß die Gleichung bleibt, wenn man beyderseits mit gleichen Zahlen multipliciert, so wird es leicht seyn, eine gegebne Zahl von Berlinerschuhen, in Amsterdamer zu verwandeln; denn man darf nur beyderseits mit dieser Zahl multiplicieren. Wir wollen setzen, es soll gefunden werden, wie viel Amsterdamerschuh 340 Berlinerschuh geben. Ich schreibe also die obige Gleichung an;

$$\frac{12570}{13730} \text{ Berl.} = 1 \text{ Amst.}$$

$$\times 340 \qquad \times 340$$

$$\frac{12570 \times 340}{13730} \text{ B.} = 340 \text{ Amst.}$$

Wenn nun wirklich multiplieiert und dividiert wird, so ist die Auflösung fertig, und man erhält 311,2 Berl. = 340 Amst. was zu suchen war.

Wollte man umgekehrt finden, wie viel z. B. Berlinerschuh, 620 Amsterdamerfuß auswerfen, so muß man zuerst die Gleichung so ordnen, daß beym Berlinerfuß die Einheit in der Gleichung zu stehen komme, entweder durch Versetzung der Gleichung, oder durch ein neues Raisonement. Man theile nämlich den Amsterdamerfuß in Gedanken in seine 12570 Theile und nehme 13730 Theile davon, so hat man den Berlinerfuß in einem Bruch des Amsterdamerfußes, das heißt

$$\frac{13730}{12570} \text{ Amst.} = 1 \text{ Berl.}$$

$$\times 620$$

$$\frac{13730 \times 620}{12570} \text{ Amst.} = 620 \text{ Berl.}$$

$$\frac{8512600}{12570} \text{ Amst.} = 620 \text{ Berl.}$$

$$677,2 \text{ Amsterd.} = 620 \text{ Berl.}$$

Nicht viel unähnlich ist auch die Verwandlung zwischen dem Dezimal- und Duodezimalmaase. Es ist bekannt, daß die Geometer wegen der Bequemlichkeit im Kalkulieren den landüblichen Schuh nur in 10 Zolle, den Zoll in 10 Linien u. s. f. eintheilen,

theilen, im bürgerlichen Leben hingegen der nämliche Schuh nach althergebrachter Gewohnheit 12 gleiche Theile bekomme, die ebenfalls Zolle heißen, so wie auch die Zwölftheile eines Zolles Linien geben. Wie hat es man demnach anzugehen, wenn ein Maas in das andere verwandelt werden soll?

Wir wollen den Dezimalzoll, weil er natürlicher Weise größer seyn muß als der Duodezimalzoll, mit Z und den andern durch z, so auch die Linien durch L und l bezeichnen. Es ist nun richtig, daß

$$10\,Z = 12\,z;\ \text{folglich}$$
$$Z = \tfrac{12}{10}\,z = \tfrac{6}{5}\,z$$
oder auch $\tfrac{10}{12}\,Z = z$

verkl. $\tfrac{5}{6}\,Z = z$

Eben so ist auch $10\,L = 12\,l$, oder bey Scrupeln

$10\,S = 12\,s$ u. s. f.

Ist also Z oder z unbekannt, so läßt sich dieß leicht aus der Gleichung finden. Z. B. Man soll 7 Dezimalzoll in Duodezimalzoll verwandeln. Sohin die erste Gleichung durch 7 multipliciert, giebt

$$7\,Z = \frac{7 \times 6\,z}{5}$$
$$7\,Z = \frac{42\,z}{5} = 8\tfrac{2}{5}\,z.$$

Man kann sich also in dergleichen Fällen leicht helfen. Weitläuftiger schreibt hievon der schon öfter angerühmte Tobias Mair, erster Theil §. 18.



Etwas



Etwas zur Geschichte der Geometrie.

Tiefer zurück in die Vorzeit wird sich der spähende Blick der geometrischen Geschichte schwerlich mit einiger Zuverläßigkeit wagen dürfen, als bis auf Thales von Milet, jenen ersten der sieben Weisen, welcher zwischen den 590sten und 460sten Jahr vor Christi Geburt lebte; obgleich Laertes von einem gewissen phrygischen Euphorbus Meldung thut, welcher bey der Zusammensetzung verschiedner Linien auf die Konstruktion eines ungleichseitigen Dreyeckes gekommen seyn sollte; eine Erfindung, auf die ein jeder anderer bey so einem Geschäfte leicht von selbst verfallen mußte. Thales hat schon größere Verdienste um die Geometrie. Ihm haben wir die Lehrsätze von der Gleichheit der Vertikalwinkel, und der Winkel an der Basis eines gleichschenklichten Dreyeckes zu verdanken; ferner nach Proklus Zeugniße von der gleichen Theilung des Zirkels durch den Diameter, und endlich den Lehrsatz, daß jedes Dreyeck, welches ein Peripherialwinkel mit dem Diameter schließt, rechtwinklicht sey. Von dem wichtigen Einfluße dieses Satzes in die übrigen Theile der Mathematik war er so sehr überzeugt, daß er dem Jupiter für diese Erfindung auf der Stelle einen Ochsen zum Opfer schlachtete. Wenn

es anbey wahr ist, was die alten Schriftsteller von ihm behaupten, daß er nämlich die runde Gestalt der Erde, die Ursache der Verfinsterungen der Sonne und des Mondes gelehret, daß er sogar Sonnenfinsternißé vorausgesagt, die eingetroffen sind, daß er den Kalender berichtigt, und zur Verbesserung der Schiffahrt den kleinen Bären zu benutzen gerathen, so kann dieser Mann nichts weniger als ein mittelmäßiger Geometer gewesen seyn; denn dieß zu leisten, werden keine gemeine Fortschritte in der Elementargeometrie erfodert. Man darf also mit Recht behaupten, daß er der erste war, der den Grund zu unsrer heutigen Geometrie geleget. Ob es lediglich vor ihm auf der ganzen weiten Erde keine Mathematiker, folglich auch keinen Geometer gab, ist eine Frage, die sich bloß mit der Möglichkeit, oder höchstens einiger Wahrscheinlichkeit bejahen läßt; denn es bleibt immerhin eine sehr gedenkbare Sache, daß es so manche blühende Reiche vor der Epoche Griechenlandes gegeben; deren Wissenschaften sammt ihren Namen von einem unseligen Verhängniße wie immer aus der Welt weggetilget wurden; da aber ohne Mathematik kein vollkommner Flor eines Landes statt haben kann, so bleibt es auch eben so gedenkbar, daß es vor dem Thales schon Gelehrte gegeben, die als Meister in diesem Fache gelten konnten. So viel ist indessen wahr, daß die Egyptier schon vor demselben einige Kenntniße der praktischen Geometrie gehabt haben müssen, wozu sie ganz natürlich die jährliche Ueberschwemmung des Nilflußes zwang, um einem jeden wieder seinen Antheil von Fluren, im Falle die Gränzen zweifelhaft geworden, zurückzustellen. Indeß mag es mit ihrer Theorie elend ausgesehen haben, weil Thales, der

doch

doch in seinem Alter mit der Absicht dahin gereist war, um sich von den dasigen Priestern in dieser Wissenschaft unterrichten zu lassen, nichts weiter als einige praktische Kunstgriffe, z. B. die Höhen der Pyramiden durch Hilfe ihres Schattens zu messen, gelernt hat, und sich am Ende gezwungen sah, selbst hierinfalls etwas zu erfinden; denn sonst könnten ihm obige Lehrsätze nicht als eigne Erfindungen zugeschrieben werden.

Nach ihm kömmt Pythagoras, ein Mann, dessen Name allenthalben bekannt und aus mehr als einer Ursache unsterblich ist. Allein über sein Geburtsort sind die Meinungen der Gelehrten so getheilt, daß sich am Ende gar nichts zuverläßiges, geschweigens etwas gewisses davon behaupten läßt. Nach dem Urtheile der meisten soll er von Samos oder Sydon gebürtig seyn, und obigen Thales von Milet zum Lehrer gehabt haben. Seine Lebenszeit fällt um die Regierungsjahre des letzten Römerkönigs Tarquin des Stolzen. Er war der erste, der dieses Studium von Μάϑημα (wissenschaftliche Lehre) Mathematik nannte, indem ihm diese Benennung vorzugsweise zukömmt. Seine jugendlichen Jahre widmete er in Egypten den Wissenschaften und kehrte von da weg, nach einem zwanzigjährigen Aufenthalt, in vierzigsten Jahre seines Alters nach Italien, wo er seine gesammelten Kenntnisse durch eignes Nachdenken erweiterte, durch die wichtigsten Erfindungen bereicherte, seinen lehrbegierigen Zeitgenoßen davon mittheilte, durch Schriften, die uns aber der mißgünstige Zahn der Zeit schon längst entrissen, auf die Nachwelt fortpflanzte, und sich dafür den Lohn der Unsterblichkeit seines Namens einärndete.

Ihm haben wir den wichtigsten und anwendbarsten Lehrsatz zu verdanken, der in alle Theile der Mathematik den namhaftesten Einfluß hat, daß nämlich in rechtwinklichten Dreyecken das Quadrat der größten Seite gleich sey den Quadraten der beyden übrigen Seiten zusamm genommen. Er vermißte diesen Lehrsatz vorher sehr hart, und fand überall unausfüllbare Lücken, so wohl in der theoretischen als angewandten Mathematik. Daher die übergrosse Freude ob dessen Erfindung, daß er seinen Gottheiten sogar eine Hekatombe geopfert haben soll, welche Hekatombe entweder 100 Ochsen, oder nach Plutarch nur einen Ochsen bedeutet, oder was wahrscheinlicher ist, weil Pythagoras die Schlachtung der Thiere für unerlaubt ansah, 100 silberne Münzen, auf welchen das Gepräge eines Ochsen befindlich war; obwohl Plutarch unter diesen feyerlichen Opfer einen künstlichen von Mehl, und Porphyrius sogar einen aus Thon gemachten Ochsen versteht. Es sey dem, wie ihm wolle. Die Erfindung ist und bleibt unschätzbar. Von ihm wurde auch die allgemeine Eigenschaft jedes geradlinichten Dreyecks, daß alle Winkel zusamm zween rechten gleich sind, zuerst entdeckt. Er starb im 80sten Jahre seines Alters.

Nach ihm trat Sokrates und Plato auf, welche zwar die Geometrie fortpflanzten, aber eben keine nahmhaften Erfindungen machten. Ersterer verbot sogar, sich nicht zu viel auf diese Wissenschaft zu verlegen, weil vielleicht die Vorliebe zur Weltweisheit bey ihm zu groß seyn mochte. Indeß hatte er in einem gewissen Verstande auch Recht; denn wahre Gelehrsamkeit kann unmöglich auf einem

einzi-

einzigen Fache beruhen; und eben die angewandte Mathematik ist es, die die hellesten Kenntniße von allen Dingen und Sachen voraussetzt. Plato bezeugte sich mehr Gönner unsrer Wissenschaft. Tagstäglich wurde bey seinen Vorlesungen zu Athen ein geometrisches Problem aufgelöset, und er nahm keinen Zuhörer oder Schüler in seine Klasse auf, die Fremdlinge in der Geometrie waren. Beweise der Fortschritte auf eben genannter Schule in diesen Studium sind die Verdoppelung des Würfels, und die Quadratur des mondenförmigen Zirkelausschnittes durch Menechmus und Hippokrates von Chius.

Etwa 300 Jahre vor Christi Geburt sammelte Euklides von Alexandrien die bisher bekanntgewordenen Lehrsätze und Aufgaben der Geometrie in ein Handbuch, welches wir noch heut zu Tage in verschiedne Sprachen übersetzt besitzen, und gleichsam das Normal der Strenge geometrischer Beweise bleibt. Nach Pappus Schilderung war Euklides ein freundschaftlicher liebenswürdiger Mann. Auf die Frage des Königs Ptolomäus, ob es keine leichtere Methode gäbe, jemand diese Wissenschaft beyzubringen, als die seinige, soll er geantwortet haben: Non est regia ad Mathematicam via. Ein Denkspruch, den sich heut zu Tage so manche schöne Geister und faselnde Romanenseelen zu merken haben, die immer gerne solide Kenntniße erwerben möchten, ohne sich Mühe geben zu dürfen. Dieser Euklides von Alexandrien muß aber wohl von jenem sauertöpfischen Philosophen von Mägara unterschieden werden, der ebenfalls diesen Namen führt, aber nichts mathematisches geschrieben hat, wie sich dieß aus dem Dioge-

nes

nes Laertius abnehmen läßt, der alle dessen Schriften anführt, und ihn ziemlich unvortheilhaft schildert.

Archimedes von Syrakus, der 287 Jahre vor Christi Geburt auf der Insel Sicilien gebohren wurde, wagte sich über die Berechnung des Zirkels und der Kugel. Plutarch macht ihn zum nahen Anverwandten des Königs Hiero. Konon von Samos, gleichfalls ein Mathematiker, war sein Freund, dem er auch in seiner præf. ad quad. parab. das Zeugniß giebt, daß er ein überaus geschickter Geometer gewesen. Archimed soll manchmal so vertieft in den göttlichen Wahrheiten der Mathematik gewesen seyn, daß er Essen und Trinken darüber vergaß, und sich seine Bedienten oft gezwungen sahen, ihn darauf zu erinnern. Seine Bemühungen verrathen auch wirklich einen der scharfsichtigsten Köpfe, da ihm Aufschlüsse durch Synthetik gelangen, die die neuern großen Geister nur auf den Weg der höheren Analyse gewinnen konnten. Wallis, jener brittische Mathematiker, der die Bahn zu dieser Analytik oder Rechnung des Unendlichen eröffnete, sagt vom Archimedes: Vir ſtupendae ſagacitatis, qui prima fundamenta poſuit inventionum fere omnium, de quibus promouendis aetas noſtra gloriatur. Ohne von seinen übrigen großen Erfindungen etwas zu sagen, entdeckte er ein sehr simples Verhältniß des Diameters zur Peripherie im Zirkel, nämlich 7 : 22. Obgleich die neuern Geometer durch schärfere Rechnungen, wie wir am gehörigen Orte schon erwähnten, es in etwas fehlerhaft fanden; so war selbes doch für die Bedürfniße damaliger Zeiten ein wichtiges Geschenk, und überdieß auch ein großer Beweis des Tiefsinns dieses alten Mathematikers. Von

noch

noch grösserer Schärfe aber zeugt sein erfundner Lehrsatz: daß die Kugel zween Drittheilen einer Walze gleicht, die Höhe und Grundfläche mit der Kugel gemeinschaftlich hat. Der Beweis dieses Satzes, oder eigentlich wieder der synthetische Weg zur Erfindung, hat die gröste Aehnlichkeit mit der Rechnung des Unendlichen, weil die Durchschnittslamellen des Kegels und der Kugel so unendlich dünne gedacht zu werden verlangen, daß sie ganz jenen Lamellen gleich geschätzt werden dürfen, die die Walze giebt. Wirklich gefiel er sich auch selbst in dieser Erfindung sowohl, daß er sie auf sein Grabmal zu meisseln befahl. Man befolgte auch seinen Willen. Denn Cicero war ein Augenzeuge von diesem Monumente, wie er sich als Quästor in Sicilien befand; und weil hohes Gebüsch dasselbe bereits ganz unsichtbar gemacht hatte, so ließ er den Ort reinigen, und rief so dessen Andenken auf ein neues aus der undankbaren Vergessenheit der Mitbürger desselben hervor.

Von den Griechen müssen wir noch den Architas nennen, der von seiner Geschicklichkeit durch die Auflösung der Frage: wie zwischen zwo Linien zwo andere Proportionallinien zu finden sind, hinlängliche Proben gegeben. Die Römer haben nicht viel Geometer aufzuweisen. Der einzige Manlius, oder wie andere wollen, Manilius zeichnete sich dadurch aus, daß er zu Augusts Zeiten auf dem Marsfelde einen Prachtkegel errichtete, wodurch er die Aequinoktien und Solstitien zu bestimmen suchte, welcher aber nach 30 Jahren, wie Plinius versichert, unbrauchbar geworden. Sein Verfahren dabey verräth viel geometrische und astronomische Kenntniß.

Wie

Wie nun alle Wissenschaften nach der Erlöschung des griechischen und römischen Flores tief schlummerten, so gieng es auch der Geometrie und den übrigen mathematischen Wissenschaften. Nur einzelne Köpfe hie und da beschäftigten sich mit ihr. So z. B. brachte Campanus von Navarra im eilften Jahrhundert den Euklides aus Arabien mit, und suchte ihn durch seine Uebersetzung gemeinnützig zu machen. Er schrieb auch von der Quadratur des Zirkels etwas.

In diese Zeit fällt auch jener persische Mathematiker Nassir Eddin, welcher unter der Regierung des Holagu, von dem bekannt ist, daß er um das Jahr 1254 Persien eroberte, im ausgebreiteten Ruhme stand. Verschiedene Werke, die wir von ihm noch besitzen, beweisen hinlänglich, daß er der größte Geometer seiner Zeit gewesen seyn müsse. Auch er schrieb einen Kommentar über den Euklid, wo er sehr strenge Beweise dieser Sätze auf die Bahn bringt. Dieses Werk wurde 1590 in der Medizäischen Druckerey im Original herausgegeben.

Im dreyzehnten Jahrhundert reiste Athelard, ein Mönch und englischer Mathematiker, nach Spanien und Egypten, und brachte ebenfalls des Euklides Geometrie mit sich, die auch er in seine Muttersprache übertrug. Nicht lange nach ihm kommentierte Barlaam, ein griechischer Mönch, über eben dieselbe. Im fünfzehnten Jahrhunderte las Franziskus Maurolykus zu Messina über die Sphäre und die Elemente des Euklides. Gegen Anfang des sechszehnten Jahrhunderts machte sich vorzüglich Ludolph van Ceulen (von Köln) ein holländischer Gelehrter und Professor der Mathematik zu Leiden, durch das

beste

beste Verhältniß des Diameters zur Peripherie bekannt. Hildesheim war seine Vaterstadt. Im Jahre 1682 gab Thomas Fautet de Lagni einen Traktat von der Quadratur des Kreises heraus, der sehr wohl aufgenommen worden.

Um die nämliche Zeit fand ein anderer holländischer Mathematiker Peter, oder wie andere wollen, Adrian Metius ebenfalls ein ziemlich gutes Verhältniß des Diameters zur Peripherie. Er setzte selbes wie 113 : 355 an. Die Veranlassung hiezu war die vermeinte Quadratur des Zirkels eines gewissen Simon von Eick. In wie fern obiges Verhältniß richtig sey, haben wir schon am gehörigen Orte §. 204 gezeiget.

In Frankreich blühten dazumal bereits schon die Wissenschaften, und unter anderen auch die Geometrie, so wie alle anderen Theile der Mathematik. Die großen Männer Pikard, de la Hire, Cassini, l'Hospital, der schon in seinem zwölften Jahre 32 Sätze vom Euklid, so wie de la Caille ihn ganz ohne Lehrer und Bücher verstand, Richer, Desagulier, Bouguer, de Luc u. m. a. haben zu entschiedne Verdienste um die Geometrie, vorzüglich durch geographische Vermessungen, als daß sie nicht eine Epoche in dieser Geschichte machen sollten.

Endlich kommen wir auf Christian Wolfen, welcher der erste war, der sowohl in der Philosophie als Mathematik, und mit ihr auch der Geometrie eine andere Gestalt im Deutschlande gab. Er leistete in diesem Fache gerade das, was Gottsched in der deutschen Sprache und Dichtkunst geleistet hat. Ob

sich gleich seine Elemente bey weiten nicht mit den Werken der heutigen Mathematiker, eines Kästners, Eulers, u. d. gl. messen dürfen, so zündeten sie doch Licht in unserm deutschen Vaterlande an, und trugen zur Aufnahme der Geometrie und übrigen Mathematik sehr vieles bey. Wolf war eines Lohgerbers Sohn in Breslau, und wurde 1679 daselbst gebohren. In Sturms Matheſi enucleata, und nachher in dessen Tabulis in vniuerſam Matheſin fand er seine ersten Anfangsgründe zur Geometrie. Der große Leibniz wurde sein Freund. Er bekleidete zuerst eine öffentliche Lehrstelle der Mathematik in Halle, wo ihn aber Fanatismus vertrieb, von da gieng er nach Marburg und ward Hofrath und Professor der dasigen hohen Schule, wurde aber wieder von Friedrich den zweyten, König in Preussen, durch ein eigenhändiges Schreiben nach Berlin gerufen; als er aber lieber in Halle zu seyn wünschte, so bewilligte ihm der König auch dahin zu reisen, wo er neben einem jährlichen Gehalt von 2000 Rthl. den Titl eines geheimen Raths und Vicekanzlers, und noch anbey die Freyheit erhielt, alles zu lehren, was und wie er wolle. Hier verlebte er seinen übrigen Rest der Jahre in Ruhm und Friede.

Seine lateinischen Anfangsgründe wurden eine geraume Zeit unter die nützlichsten und gelehrtesten Werke in diesen Fache gerechnet. Auch seine deutschen Anfangsgründe der mathematischen Wissenschaften blieben sehr lang das beste und gründlichste Vorlesbuch auf hohen Schulen; bis endlich selbe durch bessere, z. B. durch die Schriften eines Hausens, durch Segners Lehrbuch, durch Karsten, Kästner, und zum Theil auch durch Klemm verdrängt wurden.

Jo-

Abt Friderich Häseler hat seit den Jahren 1776 bis 1790 Anfangsgründe in 4 Bänden geliefert, welchen, mit Wahrheit zu reden, wegen Deutlichkeit, Solidität und Vollständigkeit, (vorzüglich wenn man sie aus dem Gesichtspunkte betrachtet, für wen er eigentlich schrieb) wenige Lehrbücher an die Seite gesetzt werden können.

Der blühende Zustand der Geometrie in unsern Tagen darf nicht erst durch Lobsprüche erhoben werden. Die besten Schriften dieser Wissenschaft, welche bereits in den Händen eines jeden Gelehrten sind, die bewunderungswürdige Akkuratesse und Gelenksamkeit, die der erfinderische Kunstfleiß eines unvergeßlichen Branders verschiednen Meßwerkzeugen zu geben wußte; vorzüglich die Erfindung des Verniers, welche (im Vorbeygehen gesagt) fälschlich einem gewissen Nonius zugeeignet wird, haben neben der Theorie auch überdieß die praktische Geometrie zum höchsten Gipfel der Vollkommenheit erhoben.

Das Alter der Trigonometrie zählt nicht so viele Jahrhunderte als die Geometrie. Die ersten Spuren ihrer Erfindung treffen wir bey Klaudius Ptolemäus an. Dieser hatte einen Auszug aus des Hipparchus 12 Büchern, die von lauter Dreyecken handelten, in seinem Almagest gemacht, von welchem Hipparch auch Theon (in Comment. Almag. Lib. I. c. 9. eine Schrift anführt, welche von den Chorden oder Sehnen handelte. Hipparch soll nach einiger Meynung ein Zeitgenosse des obgenannten Ptolomäus, welchen sie ebenfalls mit ihm zwischen die 153ste und 164ste Olympiade setzen, gewesen seyn. Andere hingegen trennen den Ptolomäus

mäus mehr als dreyhundert Jahre von Hipparchus. Genug, sie sind die beyden ersten, die uns Winke zur Erfindung der Trigonometrie gegeben.

Hundert Jahre nach Christi Geburt beschäftigte sich Menelaus von Alexandrien mit der Astronomie, und vorzüglich mit trigonometrischen Rechnungen. Auch von ihm besaß man einst ein Werk, worinn die Lehre von den Sehnen abgehandelt war. Es ist aber bekannt, daß die Alten statt den halben Chorden oder Sinussen die ganzen Chorden in ihre Trigonometrie aufnahmen. Menelaus schrieb auch 3 Bücher von den sphärischen Dreyecken, die noch vorhanden sind, und wo sein tiefer Forschgeist sattsam hervorblickt.

So nun in diesem rohen Zustande blieb die Trigonometrie bis in das fünfte Jahrhundert, wo endlich Georg Purbach, Professor der Mathematik in Wien, statt den Sehnen die Sinusse einführte, und den Radius oder Sinus totus in 600000 Theilen dabey zum Grunde legte. Sein Schüler aber Regiomontanus, eigentlich Johann Miller von Königsberg, der auch unter der gelehrten Travestierung seines Namens Molitor, oder Joh. Germanus, oder auch Joh. Frankus vorkömmt, sah das Mühsame bey diesem Kalkul bald ein, und nahm statt 60000 vielmehr 1000000 Theile des Radius an. Er berechnete auch wirklich nach diesem Systeme einen Quadranten des Zirkels von Minuten zu Minuten, und war nebenher der Erste, welcher die Tangenten in der Trigonometrie zu benützen lehrte, und gleichfalls Tafeln dafür, wie bey den Sinussen bearbeitete.

Unge-

Ungeachtet dieser großen Erleichterung blieben doch die trigonometrischen Rechnungen immer noch eine verdrüßliche, mühsame Arbeit. Aber bald brach ein glücklicherer Zeitpunkt in Brittanien für die Trigonometrie und andere Theile der Mathematik an. Es wurden dort durch Johann Neper die Logarithmen zur größten Wohlthat der mathematischen Welt erfunden. Kepler schreibt diese Erfindung dem Jost Bürge, Hofmechanikus von Hessenkassel, zu. Indeß scheint es, daß Neper und Bürge, jeder für sich, diese Entdeckung gemacht, und keiner von den andern etwas gewußt habe. Erfand ja auch Leibnitz und Neuton, wie wir bey der Geschichte der höhern Mathematik hören werden, jeder für sich die Differentialrechnung; folglich ist auch dieser Fall sehr wohl möglich. Prof. Tanzer will sogar Grafen Herwart von Hohenburg zur Ehre der baierischen Nation als den ersten Erfinder dieser Logarithmen angeben. Seine Beweise sind auch in der That nicht so unerheblich, als daß man die Wahrscheinlichkeit läugnen könnte. Wenigst ist gewiß, daß Herwarts Tafeln, die eine gewisse Art von Logarithmen enthalten, 4 Jahre vor der Ausgabe der neperischen Tafeln im Drucke erschienen. Wir lassen die Sache dahin gestellt seyn, und merken dabey an, daß die Logarithmen welche man dermal besitzt, weder von Neper noch von Bürge, noch auch von Herwart, sondern von Heinrich Briggs, Prof. zu Oxfort berechnet worden sind, welcher sie 1624 in seiner Arithmetica logarithmica bis auf 20000 herausgegeben, wozu aber Ursinus und Vlacq mit der Zeit Nachträge gemacht; da ersterer die Logarithmen von 10 zu 10 Sekunden, und letzterer die der Ordnungszahlen von 20000 bis 90000 hinzugethan.

Wir

Wir wollen uns mit Neper und Briggs diesen großen Wohlthätern etwas näher bekannt machen. Letzterer ward zu Warleywood in der Grafschaft York beyläufig um das Jahr 1680 von armen Eltern gebohren: ersterer aber sein Zeitgenoß in Schottland, und schrieb sich Baron von Merchiston. Briggs reiste im siebenzehnten Jahre seines Alters nach Cambridge, und widmete sich auf dasigen Schulen ganz seinem Lieblingsstudium der Mathematik. Er brachte es hierin so weit, daß, als im Jahr 1596 zu London das berühmte Greshams-Collegium gestiftet wurde, er in selben als erster Professor der Geometrie aufgestellt wurde, wo er bald das Glück hatte, mit dem nachherigen Erzbischof Usser in geheime Freundschaft zu tretten. Seine ersten Bemühungen der Nebenstunden schenkte Professor Briggs der Astronomie. Er versuchte es, aus den Prutenschen Tafeln eine Tabelle künftiger Finsternisse zu berechnen; aber Keplers Theorie des Planetensystems, welche gerade damals bekannt wurde, machte einen kleinen Strich durch seine Rechnungen. Indeß fuhr er doch fort andere nützliche Tafeln für die Astronomie zu verfertigen. Als Nepers Logarithmen erschienen, erregte diese Erfindung Briggs ganze Aufmerksamkeit. Er schrieb an Nepern und entdeckte ihm seine Gedanken hierüber, worunter hauptsächlich die Bemerkung war, daß das Logarithmensystem weit mehr Bequemlichkeit gewänne, wenn der Log. 1 = 0 und Log. sin. tot. = 1000 angesetzt würde. Worüber ihm Neper, zu welchen jener den Sommer darauf gereist war, und sich ein ganzes Monat mit ihm unterhielt, auch Dank wußte, mit dem Beysatze, daß er selbst schon diese Meynung geheget; aber wegen Krankheit und

anderen

anderen Geschäften vom Belange keine Musse habe dazu finden können.

Als Briggs wieder nach Hause gekehrt war, fieng er das mühsame Werk der Logarithmenberechnung bereits an. Ein gewisser Eduard Wright übersetzte seine Arbeiten in's Englische, unterwarf es Nepers Prüfung, und wollte sie zum Drucke befördern. Allein weil jener darüber starb, ward dieß seinem Sohne vorbehalten, der es auch 1616 zu London wirklich that, wozu Briggs eine Vorrede schrieb. Das Jahr darauf stattete Briggs Nepern einen zweyten Besuch ab, und es würde vielleicht noch öfter geschehen seyn, wenn Neper nicht 1618 mit Tod abgegangen wäre. Briggs wurde nachher erster Professor der Geometrie zu Oxford, wo Savile zwo Lehrämter gestiftet, nachdem er bereits 23 Jahre an dem Greshamskollegium geglänzt hatte. Hier gab er 1620 die ersten 6 Bücher vom Euklid, und 4 Jahre darnach seine Arithmeticam logarithmicam heraus. Er starb den 26. Jäner 1630, zwölf Jahre nach seinem Freund Neper.



Mit Franzischen Schriften.

Berichtigungen.

Seite	Linie	statt	lies
28	10	rechtwinklichten	rechtwinklichten gleichschenklichten
29	16	Fig. 8. Nro II	Fig. 7. Nro 2.
39	29	Grundlinie	Grundlinie und Höhe
46	21	sowohl zum benachbarten u. s. f.	sowohl zu eben diesem Parallelogram, als das ganze Dreyeck selbst zu jedem Quadrate der Lothen hinzudenkt u. s. f.
47	14	$bc = bq$	$bc = cq$
48	25	35,9	35,7
51	27	rechten Winkel	Winkel
65	10	fb	fg
66	6	ab	ab,
—	27	al	ac
78	4	ac^2	ab^2
—	8	$ab + ab$	$ab \times ab$
82	3	$\frac{P}{2}$	P
—	4	lc	dc
85	15	viel r giebt	viele giebt
—	23	Fig. 102	Fig. 100
86	5, 9 u. 10	c	d
90	14	$\sqrt{2-2\sqrt{2}\&c.}$	$\sqrt{2-\sqrt{2}\&c.}$
101	18	Grundfläche	Grundlinie
110	21	$\sqrt[3]{\pi^2 S}$	$\sqrt[3]{6 \pi S}$
133	18	tang : R =	Tang : R =
134	1	ae	ai
135	9, u. 10	o	n
—	9	x	y
138	2	oder auch weniger	oder auch 1, weniger
144	12 u. 17	540	590
—	13 u. 17	320	370
146	15	$\times (ab+ai) bi \times bf$	$\times (ab - ai) = bi \times bf$
—	18	$x bf$	$x = bf$
162	31	Winkeln	Winken

S. 190 L. 24 u. 28 so auch S. 191 L. 8 lese man Amsterdamerschuh statt Berlinerschuh, und wechselweise.

Erste Tafel der Geometrie

Fig. 2

Fig. 4

Fig. 5

Fig. 7

Fig. 8

Fig. 10

Fig. 11

Fig. 12

ad Fig. 14

Fig. 13

Fig. 15

Fig. 16



Fig. 19.

Fig. 20.

Fig. 23.

Fig. 29.

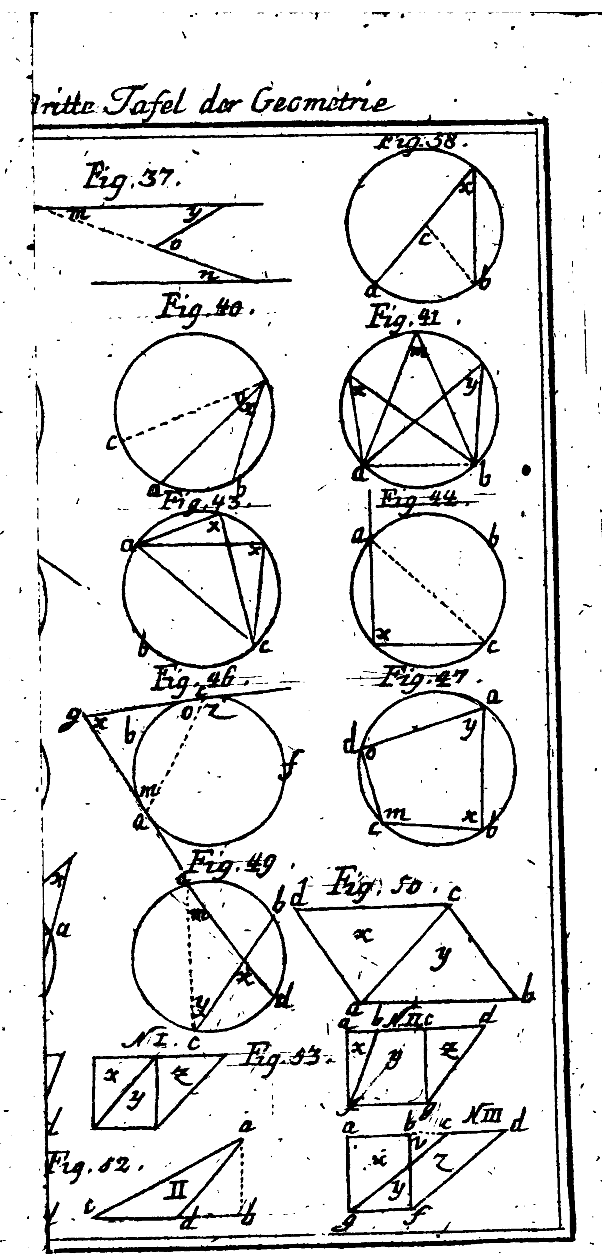
Fig. 29.

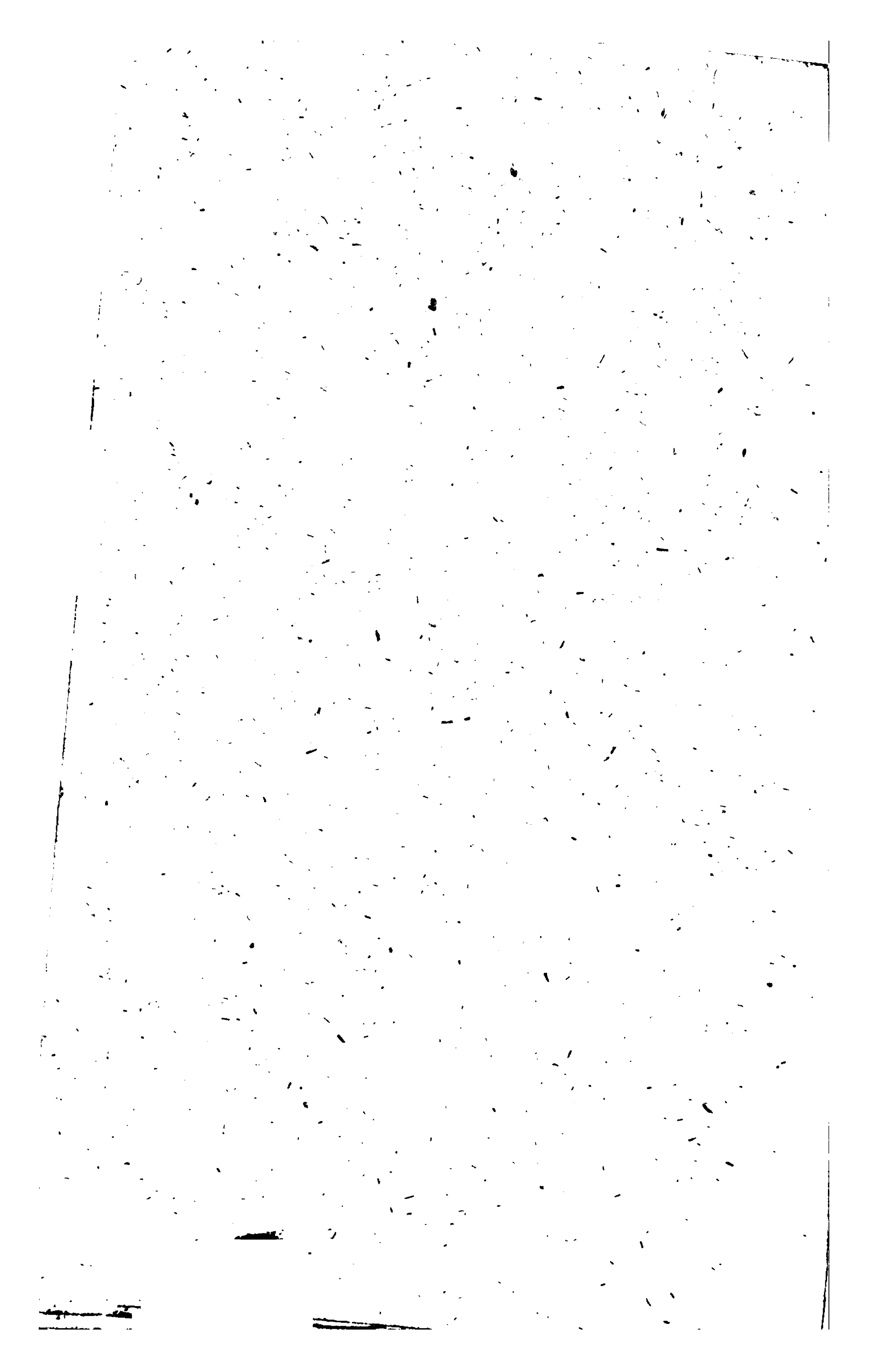
Fig. 32.

Fig. 35.



Dritte Tafel der Geometrie





Geometrie.

Fig. 56.

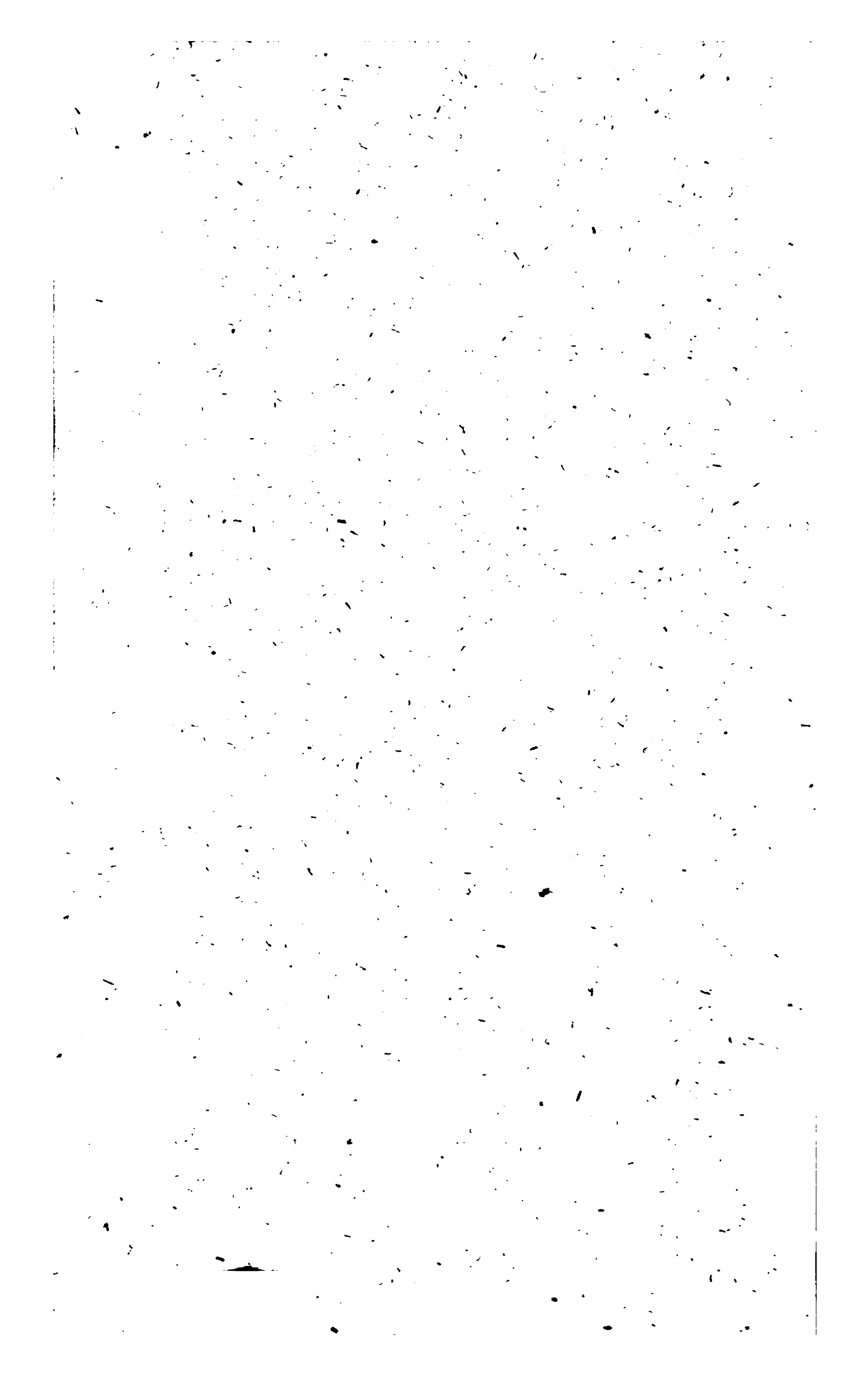
Fig. 59.

Fig. 62.

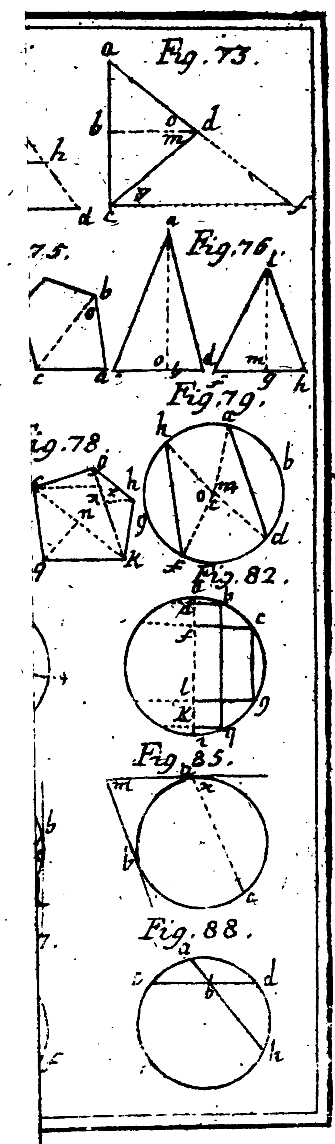
Fig. 64.

Fig. 67.

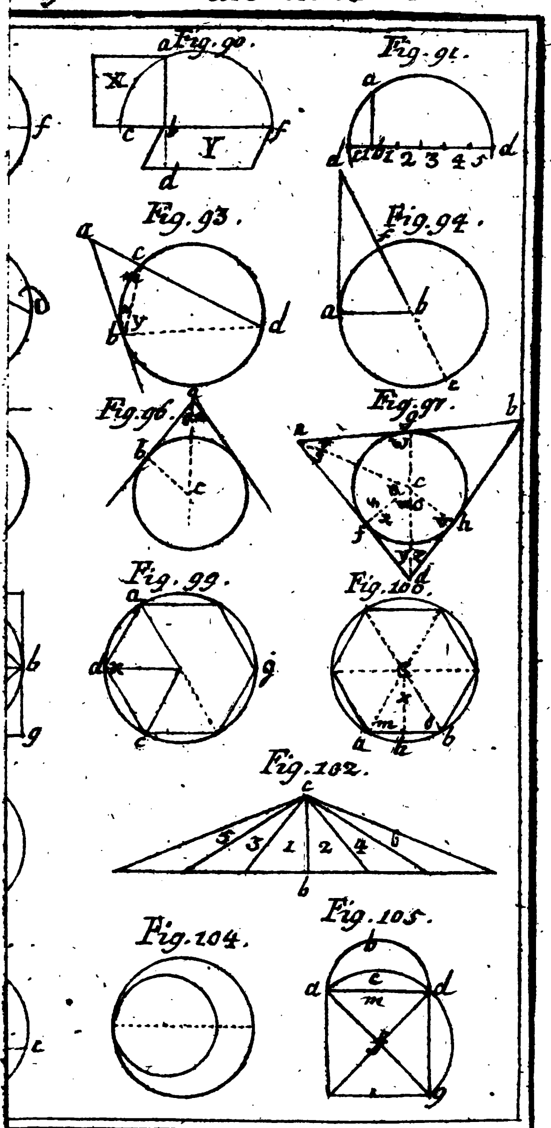
Fig. 70.

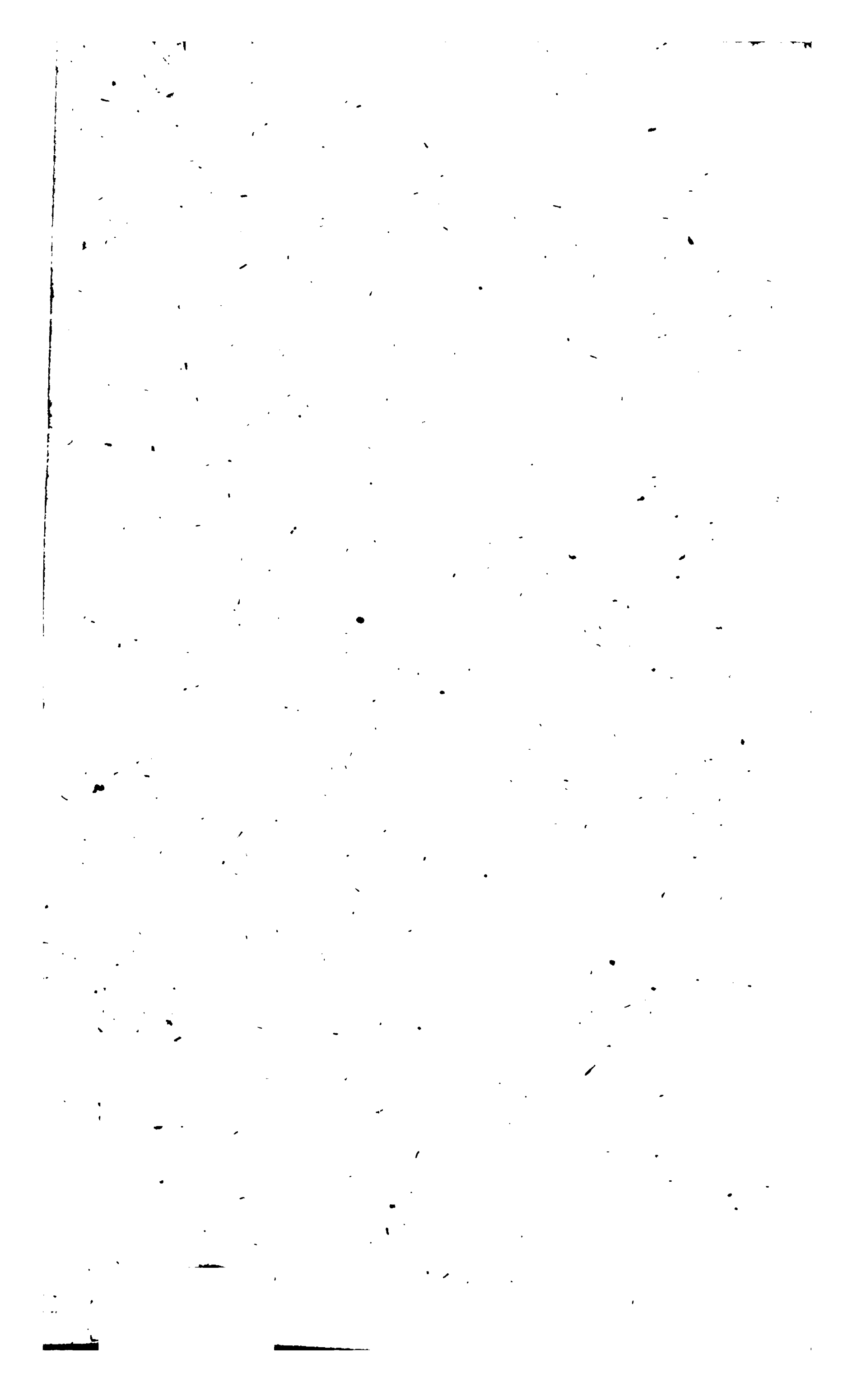


trie

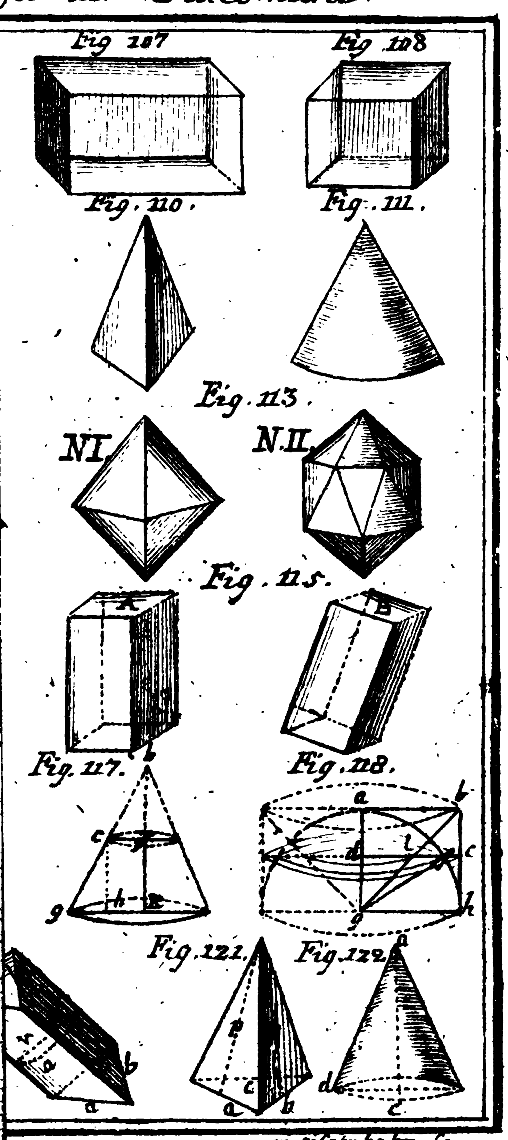


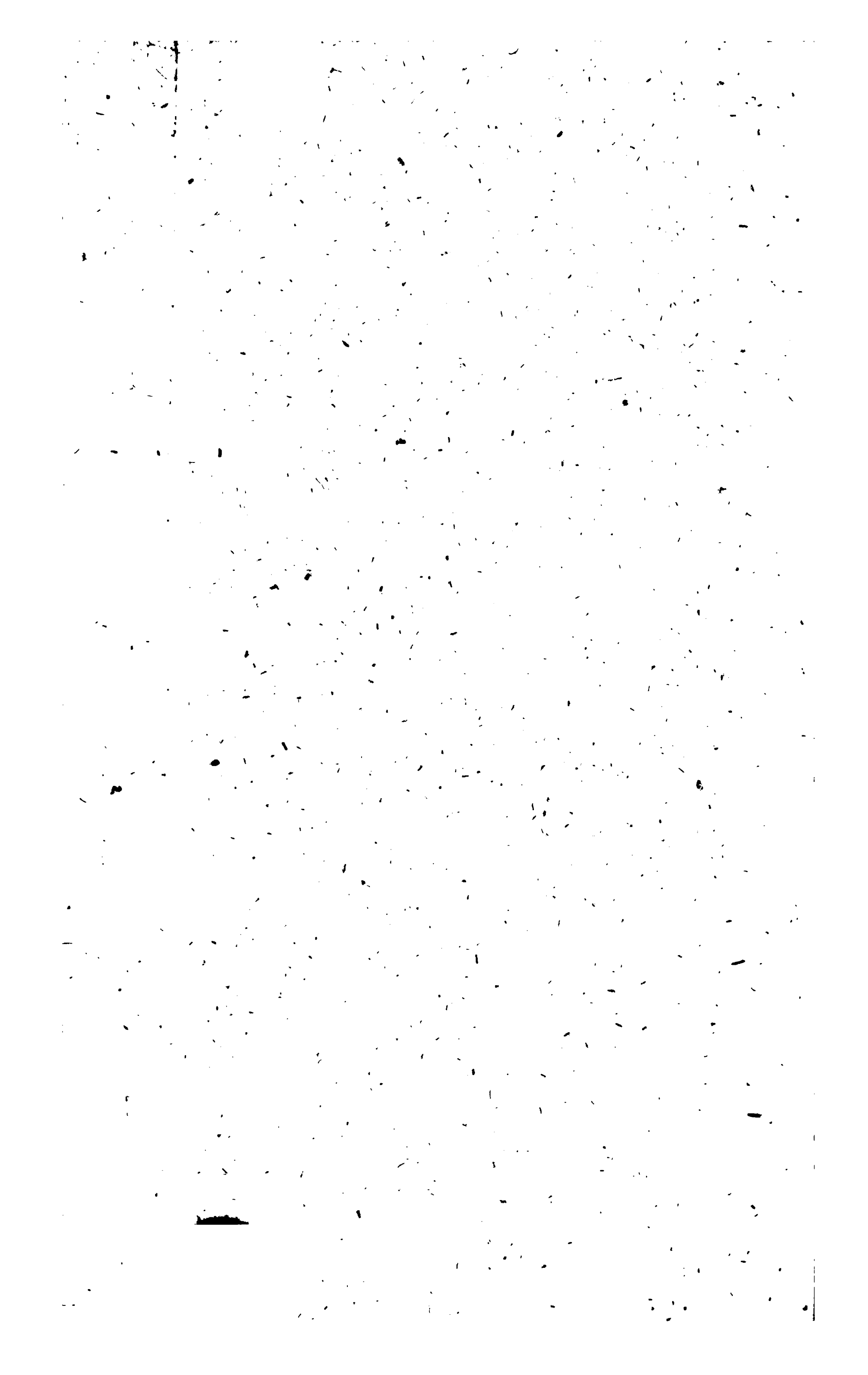
Tafel der Geometrie

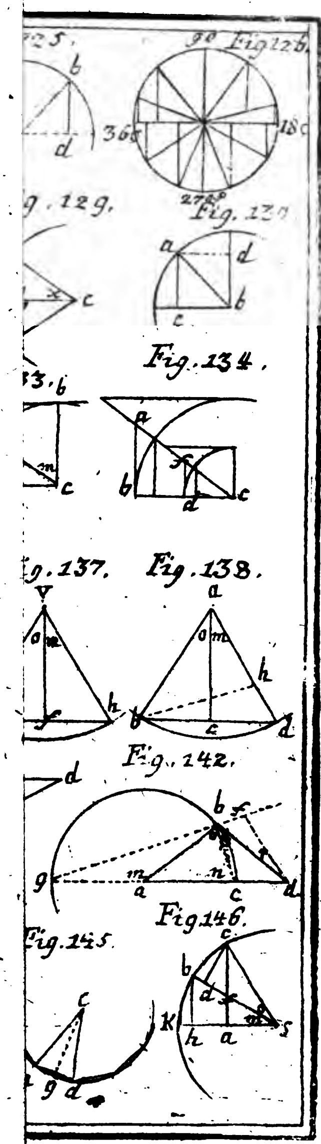


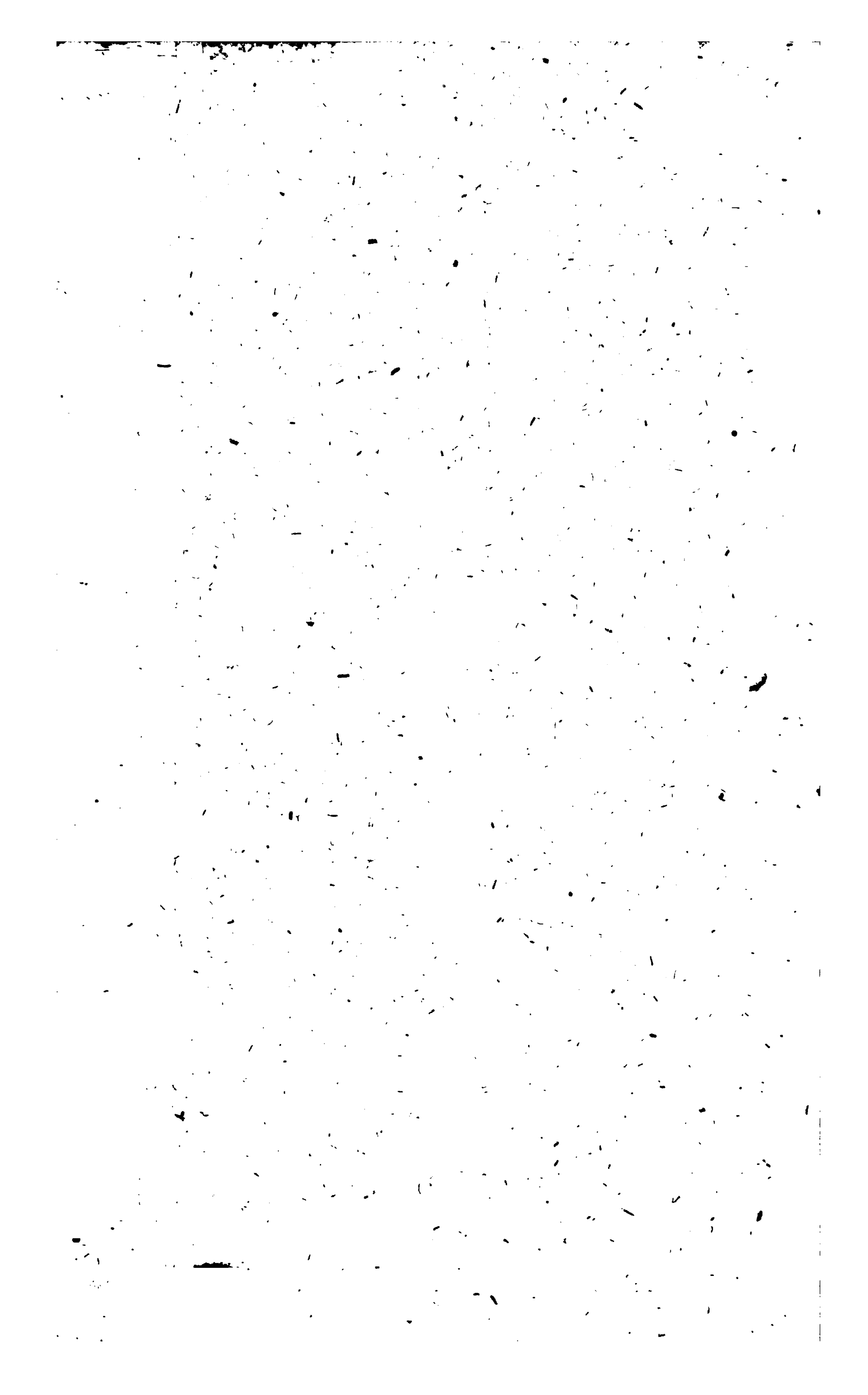


...fel der Stereometrie.






Fig.126.
Fig.129.
Fig.130
Fig.134.
Fig.137.
Fig.138.
Fig.142.
Fig.145.
Fig.146.



aktischen Geometrie.

